Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastik II: Übungen und Ergänzungen **WS 2024/25**

Blatt 1

Aufgabe 1.1 Seien $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ σ-Algebren und X eine reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$.

a) Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big)^2\big] + \mathbb{E}\big[\big(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\big)^2\big] = \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\big)^2\big].$$

b) Zeigen Sie:

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]] + \mathbb{E}[\mathrm{Var}[X \mid \mathcal{G}]]$$

wobei

$$\mathrm{Var}[X \mid \mathcal{G}] := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2 \,\middle|\, \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{G}] - (\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2$$

c) Sind X und Y reellwertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$ und $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] < \infty$, dann gilt $X = Y$ f.s.

Aufgabe 1.2 Sei $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine symmetrische gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Start in $S_0 = 0$, d.h. $S_n - S_{n-1}, n \in \mathbb{N}$ sind u.i.v. $\sim \mathrm{Unif}(\{-1, 1\})$.

a) Zeigen Sie: S und $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $M_n = S_n^2 - n$ sind Martingale (bezüglich der von S erzeugten Filtration).

b) Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $\tau := \inf\{n : S_n = -a \text{ oder } S_n = b\}$. Verwenden Sie Teil a), um $\mathbb{P}(S_\tau = b)$ und $\mathbb{E}[\tau]$ zu berechnen.

Aufgabe 1.3 (6 Punkte) Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal mit beschränkten Inkrementen, d.h. $|M_n - M_{n-1}| \leqslant c$, $n \in \mathbb{N}$ für ein festes $c < \infty$. Dann gilt $\mathbb{P}(C \cup F) = 1$ für die beiden disjunkten Ereignisse

$$\begin{aligned} C &:= \{M_n \text{ konvergiert gegen einen endlichen Grenzwert}\}, \\ F &:= \{\limsup M_n = +\infty, \liminf M_n = -\infty\} \end{aligned}$$

[*Hinweis*: Um $\mathbb{P}(\{\liminf M_n > -\infty\} \cap C^c) = 0$ zu zeigen, können Sie den gestoppten Prozess $(M_{n\wedge T_K} - M_0)_n$ betrachten mit $T_K := \inf\{m \in \mathbb{N}_0 : M_m \leqslant -K\}$. Dies ist ein nach unten beschränktes Martingal.]

Aufgabe 1.4 (6 + 6 + 6 Punkte) Sei $N \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$, $D_1, \dots, D_N$ unabhängige $\{\pm 1\}$-wertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(D_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(D_i = -1)$, $\mathcal{F}_n := \sigma(D_1, \dots, D_n)$ mit $\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}$. (Ein „kanonisches“ Szenario ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_p)$ mit $\Omega = \{-1, +1\}^N$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$, $\mathbb{P}_p(\{(\omega_1, \dots, \omega_N)\}) = p^{\#\{i:\omega_i=+1\}}(1-p)^{\#\{i:\omega_i=-1\}}$ und $D_i : \Omega \to \{-1, +1\}$, $D_i((\omega_1, \dots, \omega_N)) = \omega_i$.)

a) (Ein diskreter Martingaldarstellungssatz) Prüfen Sie, dass

$$Z_0 := 0, \quad Z_n := \sum_{i=1}^{n} (D_i - 2p + 1), \quad n = 1, \dots, N$$

ein Martingal ist (bezüglich der Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0,1,\dots,N}$). Sei $(M_n)_{n=0,\dots,N}$ ein (beliebiges) Martingal bezüglich $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass es einen previsiblen Prozess (H_n) gibt, so dass gilt

$$M_n = M_0 + (H \bullet Z)_n, \quad n = 1, \dots, N$$

b) (Ein einfaches Marktmodell: das Cox-Ross-Rubinstein-Modell oder Mehr-Perioden-Binomialmodell) Seien $0 < a < 1 + r < b$, $B_n := (1 + r)^n$ und mit einem festen $S_0 > 0$

$$S_n := S_{n-1}\big(\tfrac{b+a}{2} + \tfrac{b-a}{2} D_n\big), \quad n = 1, \ldots, N.$$

Wir denken bei B_n an den Wert eines risikolosen Wertpapiers ("bond") und bei S_n an den Wert eines risikobehafteten Wertpapiers ("stock") zur Zeit n. Offenbar hat $R_n := S_n/S_{n-1}$, die Rendite ("return") einer Investition in S über das Zeitintervall $[n-1, n)$, die beiden möglichen Werte a und b.

Ein Paar previsibler Prozesse $(V_n)_n$, $(W_n)_n$ heißt eine *selbstfinanzierende Handelsstrategie*, falls gilt

$$V_{n-1}B_{n-1} + W_{n-1}S_{n-1} = V_n B_{n-1} + W_n S_{n-1}, \quad \text{für } n = 1, \ldots, N \tag{1}$$

Dann ist

$$X_n := V_n B_n + W_n S_n, \;\; n \in \{1, \ldots, N\} \qquad (\text{mit } X_0 := V_1 B_0 + W_1 S_0)$$

der Wert des Portfolios eines Händlers, der über das Zeitintervall $(n-1, n)$ jeweils V_n Einheiten des bonds und W_n Einheiten des stock besitzt (und möglicherweise zwischen solchen Intervallen sein Portfolio umschichtet, ohne Kapital hinzuzufügen oder wegzunehmen). Verifizieren Sie, dass

$$X_n = X_0 + (V \bullet B)_n + (W \bullet S)_n \quad \text{für } n = 1, \ldots, N$$

gilt und dass $Y_n := X_n/(1+r)^n, n = 0, 1, \ldots, N$ ein Martingal ist, falls $p = p^* := (1+r-a)/(b-a)$. (Übrigens: was ist $\mathbb{E}_{p*}[S_N/S_0]$?)

c) (Preis einer europäischen Call-Option im CRR-Modell) Sei $K > 0$ und $C := (S_N - K)^+$ der Wert zur Zeit N einer Option, deren Inhaber das Recht (aber nicht die Pflicht) hat, eine Einheit des stock zur Zeit N zum Preis K zu kaufen (eine europäische Call-Option mit Ausübungspreis K).

Beschreiben Sie eine selbstfinanzierende Handelstrategie mit Startwert

$$X_0 = \mathbb{E}_{p*}[C/(1 + r)^N]$$

(mit $p^* = (1 + r - a)/(b - a)$ aus Teil b)) und Endwert $X_n = C$.

[*Hinweise*: a) Betrachten Sie zunächst den ein-Perioden-Fall $N = 1$.

c) Betrachten Sie $Y_n = \mathbb{E}_{p*}[C/(1 + r)^N | \mathscr{F}_n]$, verwenden Sie Teil a).]