Prof. Dr. Matthias Birkner | JGU Mainz

Stochastik II: Übungen und Ergänzungen **WS 2024/25**

Blatt 2

Aufgabe 2.1 Sei $d \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $h : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ heißt (diskret) harmonisch, wenn gilt

$$h(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y\,:\,||y-x||_2=1} h(y) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{Z}^d$$

a) Sei $(S_n)_n$ die symmetrische gewöhnliche Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ und $h : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ harmonisch. Zeigen Sie: $(h(S_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal.

b) Sei $d \leqslant 2$, $h : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ harmonisch und nach unten beschränkt. Zeigen Sie: Dann ist h konstant.

[*Hinweis*: Sie dürfen verwenden, dass $(S_n)_n$ für $d \leqslant 2$ rekurrent ist. Wenden Sie den Martingalkonvergenzsatz auf das Martingal aus a) an.]

Aufgabe 2.2 Können Sie ein $\mathscr{L}^2$-Martingal $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ finden, so dass $M_n \to M_\infty$ f.s. für $n \to \infty$ gegen eine endliche Zufallsvariable M_∞ konvergiert, aber $\langle M\rangle_n \to \infty$ f.s. divergiert?

[*Hinweis*: a) Experimentieren Sie beispielsweise mit Partialsummen einer Folge unabhängiger, aber nicht stationärer Summanden.]

Aufgabe 2.3 (9+3 Punkte) Kann es eine Doob-$\mathcal{L}^1$-Ungleichung geben?

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal und $\overline{X}_n := \max_{0\leqslant k\leqslant n} X_k^+$. Dann gilt mit $\log^+(x) := \max\{\log(x), 0\}$

$$\mathbb{E}\big[\overline{X}_n\big] \leqslant \frac{1}{1-1/e}\Big(1 + \mathbb{E}\big[X_n^+ \log^+(X_n^+)\big]\Big) \tag{1}$$

b) Können Sie ein Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ finden mit $\mathbb{E}[X_n^+] > 0$ für jedes n und

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\overline{X}_n]/\mathbb{E}[X_n^+] = \infty\ ?$$

[*Hinweis*: a) Adaptieren Sie den Beweis der Doobschen $\mathcal{L}^p$-Ungleichungen (Satz B.40) geeignet, verwenden Sie dabei die (triviale) Schranke $\mathbb{P}(\overline{X}_n \geqslant \lambda) \leqslant 1$ für $\lambda \leqslant 1$ und eine Schranke aus Lemma B.39 für $\lambda > 1$. Falls Sie möchten, finden Sie mehr Hinweise auf der Rückseite.]

Aufgabe 2.4 (4+4+4 Punkte) a) Sei S endlich oder abzählbar, $p = (p_{x,y})_{x,y\in S}$ stochastische Matrix auf S, μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf S und $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf S mit Übergangsmatrix p und Startverteilung μ. Sei $f : S \to \mathbb{R}$, $\lambda \geqslant 0$ und es gelte

$$\sum_{y\in S} p_{x,y} f(y) \leqslant \lambda f(x) \quad \text{für alle } x \in S \tag{2}$$

(und implizit $\sum_y p_{x,y}|f(y)| < \infty$, so dass obige Summe wohldefiniert ist) sowie $\sum_{x\in S} \mu(\{x\})|f(x)| < \infty$.

Zeigen Sie: Dann ist $(\lambda^{-n} f(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal (bezüglich der von X erzeugten Filtration). Falls (2) mit Gleichheit gilt, so ist es ein Martingal.

b) Das (neutrale zwei Typ-)Wright-Fisher-Modell mit Populationsgröße $N \in \mathbb{N}$ ist eine Markovkette auf $S = \{0, 1, \dots, N\}$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{x,y} = \binom{N}{y}(x/N)^y(1 - x/N)^{N-y}$, d.h. $\mathscr{L}(X_{k+1} \mid X_k = x) = \mathrm{Bin}_{N,x/N}$. Zeigen Sie:

$$(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \quad \text{und} \quad \big((1 - 1/N)^{-k} X_k(N - X_k)\big)_{k\in\mathbb{N}_0} \qquad \text{sind Martingale}$$

b.w.

c) In der Situation von b) sei $\tau := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : X_k = 0 \text{ oder } X_k = N\}$. Folgern Sie aus b), dass $\mathbb{P}_x(\tau < \infty) = 1$ gilt und bestimmen Sie $\mathbb{P}_x(X_\tau = N)$ für $x \in \{0, 1, \dots, N\}$. Berechnen Sie auch

$$\mathbb{E}_x\Big[2\frac{X_k}{N}\frac{N - X_k}{N}\Big] \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

(Wenn man X_k als die Anzahl Individuen vom Typ 1 in einer Population der konstanten Größe N interpretiert, in der es zwei verschiedene genetische Typen gibt, so ist dies die Wahrscheinlichkeit, bei zweimaligem zufälligem Ziehen mit Zurücklegen aus der Population nach k Schritten in der Stichprobe verschiedene Typen zu sehen.)

Eine *Anleitung zu Aufgabe 2.3*: Sei zunächst $M \in (0, \infty)$. Wie folgt mittels Lemma B.39, dass

$$\mathbb{E}\big[\overline{X}_n \wedge M\big] \leqslant 1 + \int_1^M \mathbb{P}\big(\overline{X}_n \wedge M \geqslant \lambda\big)\, d\lambda \leqslant 1 + \mathbb{E}\big[X_n^+ \log^+(\overline{X}_n \wedge M)\big]$$

gilt?

Zeigen Sie, dass $\inf_{x>0} x \log x = -1/e$ gilt und folgern Sie, dass für $a, b > 0$ gilt $a \log b \leqslant a \log a + b/e$. Wenden Sie dies auf obige Ungleichung an, stellen Sie geeignet um und betrachten Sie dann $M \to \infty$.