Stochastik II: Übungen und Ergänzungen **WS 2024/25**

Blatt 3

Aufgabe 3.1 a) Sei $n \geqslant 2$, seien $X_1, \ldots, X_n$ austauschbare, quadratintegrierbare reelle ZVn. Dann gilt stets

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \geqslant -\frac{1}{n-1}\mathrm{Var}(X_1).$$

Können Sie ein Beispiel angeben, in dem Gleichheit gilt?

b) Für eine unendliche austauschbare Folge quadratintegrierbarer reeller ZVn $X_1, X_2, X_3, \ldots$ gilt $\mathbb{E}[X_1X_2] \geqslant \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \geqslant 0$.

c) Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ ein Beispiel einer austauschbaren Familie von n Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die *nicht* zu einer unendlichen Familie $X_1, X_2, \ldots$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 3.2 Für eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ austauschbarer $\{0,1\}$-wertiger Zufallsvariablen und $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_k = 1 \mid S_n = m) = \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$$

Aufgabe 3.3 ("Ballot theorem", 12 Punkte) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u.i.v. mit Werten in $\mathbb{Z}_+$ und $\mathbb{E}[X_i] < \infty$, $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $G := \{S_j < j \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\big(G \,\big|\, S_n\big) \geqslant (1 - S_n/n)^+$$

(und es gilt Gleichheit, wenn die X_i nur Werte aus $\{0,1,2\}$ annehmen).

[*Hinweis*: $Y_k := S_{-k}/(-k)$, $k = -n, -n+1, \ldots, -1$ ist ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathscr{F}_k)_{k=-n,-n+1,\ldots,-1}$ mit $\mathscr{F}_k = \sigma(S_{-k}, S_{-k+1}, \ldots, S_n)$,

$$T := \inf\big\{k \in \{-n, -n+1, \ldots, -1\} : Y_k \geqslant 1\big\} \wedge (-1)$$

ist eine Stoppzeit. Mit $G := \{S_j < j \text{ for all } j = 1, \ldots, n\}$ gilt $\mathbf{1}_{G^c} \leqslant Y_T$, verwenden Sie dann das optional sampling-Theorem.

Im Fall $\mathbb{P}(X_1 \in \{0,1,2\}) = 1$ zeigen Sie, dass mit $\varrho := \max\{0 \leqslant j \leqslant n : S_j - j \geqslant 0\}$, $\{S_n - n < 0\} \subset \{S_\varrho - \varrho = 0\}$ f.s. gilt, folgern Sie $\{S_n - n < 0\} \cap G^c \subset \{Y_T = 1\}$ f.s.]

Aufgabe 3.4 (Asymptotik der Pólya-Urne, 6+6 Punkte) In einer Urne befinden sich anfangs M schwarze und $N - M$ weiße (und ansonsten ununterscheidbare) Kugeln ($M, N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant M$). In jedem Zug wird rein zufällig eine der Kugeln aus der Urne gezogen und dann zusammen mit einer neuen Kugel derselben Farbe wieder zurückgelegt, nach n Zügen befinden sich also $N + n$ Kugeln in der Urne. Sei

$$X_n := \mathbf{1}(n\text{-te gezogene Kugel ist schwarz}),$$

$S_n := M + X_1 + \cdots + X_n$ die Anzahl schwarzer Kugeln in der Urne nach n Zügen.

a) Zeigen Sie: $X_1, X_2, \ldots$ sind nicht unabhängig, aber austauschbar.

[*Hinweis*: Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$ für $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ und dann $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$ durch sukzessive Anwendung der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit.]

b.w.

b) Warum existiert

$$Z := \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{N+n} \quad \text{f.s. und in } \mathcal{L}^1?$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Z^k]$ für $k \in \mathbb{N}$.

Die Beta-Verteilung $\beta_{a,b}$ mit Parametern $a, b > 0$ hat Dichte

$$\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mathbf{1}_{(0,1)}(x) x^{a-1} (1-x)^{b-1}.$$

Für welche Wahl von a, b (in Abhängigkeit von M, N) stimmen die Momente von Z mit denen von $\beta_{a,b}$ überein?