Stochastik II: Übungen und Ergänzungen **WS 2024/25**

Blatt 4

Aufgabe 4.1 Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. mit Werten in $\mathbb{Z}$, $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $R_n := \{S_n = 0\}$. Stets gilt

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} R_n\big) \in \{0, 1\}.$$

Gilt diese Aussage auch, wenn wir nur annehmen, dass die X_i austauschbar sind?

Aufgabe 4.2 Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ austauschbare reellwertige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Konvergiert die Folge

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (X_i - X_j)^2$$

fast sicher für $n \to \infty$? Falls ja, was ist der Grenzwert?

Wie sieht es aus, wenn die X_i unabhängig und identisch verteilt sind?

Aufgabe 4.3 (6+6 Punkte) Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine austauschbare Folge $\{0, 1\}$-wertiger Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie, dass die Verteilung von $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eindeutig festgelegt ist durch die Folge der

$$\widetilde{m}_n := \mathbb{E}\big[X_1 X_2 \cdots X_n\big], \quad n \in \mathbb{N}$$

b) Sei W eine Zufallsvariable mit Werten in $[0, 1]$. Verwenden Sie Teil a) und den Satz von de Finetti um zu beweisen, dass die Verteilung von W eindeutig festgelegt ist durch ihre Momente

$$m_n := \mathbb{E}[W^n], \quad n \in \mathbb{N}$$

[*Hinweise*: a) Mit $A_i = \{X_i = 1\}$ kann man für $B, C \subset \mathbb{N}$ mit $B \cap C = \varnothing$ und $|B|, |C| < \infty$ schreiben

$$\mathbf{1}\big(X_i = 1 \text{ für } i \in B \;\text{ und }\; X_j = 0 \text{ für } j \in C\big) = \Big(\prod\nolimits_{i\in B} \mathbf{1}(A_i)\Big)\Big(\prod\nolimits_{j\in C}(1 - \mathbf{1}(A_j))\Big)$$

b) Verwenden Sie eine Darstellung wie in Beispiel 1.3, iv) der Vorlesungsnotizen.]

Aufgabe 4.4 (4+4+4 Punkte) Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. $\sim$ Pois(1) und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\big[|S_n - n|\big] = \mathbb{E}\big[S_n - n\big] - 2\mathbb{E}\big[(S_n - n)\mathbf{1}(S_n < n)\big] = \frac{2e^{-n}n^n}{(n-1)!}$$

b) Zeigen Sie

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\big[|S_n - n|\big] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\big[|Z|\big]$$

mit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

c) Folgern Sie aus a) und b) die Stirling-Approximationsformel

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

[*Hinweis*: a) Es ist $\sum_{x=0}^{n-1}(n-x)\frac{n^x}{x!} = n + \sum_{x=1}^{n-1}\big(\frac{n^{x+1}}{x!} - \frac{n^x}{(x-1)!}\big)$.]