

**Aufgabe 5.1** Seien  $(B_t)_{t \geq 0}$  und  $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$  unabhängige Standard-Brownbewegungen. Für welche Wahlen von  $a, b \in \mathbb{R}$  ist dann  $(aB_t + b\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$  ebenfalls eine Standard-Brownbewegung?

**Aufgabe 5.2** (Quadratische Variation der Brownschen Pfade und eine Folgerung zu Hölder-Eigenschaften) Sei  $(B_t)_{t \geq 0}$  eindimensionale Standard-Brownsche Bewegung,  $t > 0$ , für  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$  sei  $s(n, m) := tm/2^n$  und  $D_{n,m} := B_{s(n,m)} - B_{s(n,m-1)}$ .

a) Zeigen Sie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t \right)^2 \right] < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 = t \quad \text{f.s.}$$

[Hinweis. Verwenden Sie die Chebyshev-Ungleichung, um aus der linken Abschätzung zu folgern, dass  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 - t \right| > \varepsilon \right) < \infty$  für jedes  $\varepsilon > 0$ , dann ein Borel-Cantelli-Lemma.]

b) Folgern Sie: Für  $\gamma > 1/2$  ist

$$\sup_{0 \leq u < v \leq t} \frac{|B_v - B_u|}{(v - u)^\gamma} = \infty \quad \text{f.s.,}$$

d.h. die Pfade sind auf  $[0, t]$  f.s. nicht Hölder-stetig der Ordnung  $\gamma$ .

[Hinweis. Auf dem Ereignis  $\left\{ \sup_{0 \leq u < v \leq t} |B_v - B_u| / (v - u)^\gamma < c \right\}$  gilt  $\sum_{m=1}^{2^n} D_{n,m}^2 \leq 2^n \times (ct^\gamma 2^{-n\gamma})^2 = c^2 t^{2\gamma} 2^{n(1-2\gamma)}$ , was a) widerspricht.]

**Aufgabe 5.3** (Gerichtete Perkolations, 3+3+4+6+8 Punkte) Seien  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  die kanonischen Einheitsvektoren in  $\mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbf{0} = (0, 0)$ . Eine Folge  $(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n)$  von Punkten  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{Z}_+^2$  mit  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  für  $i = 1, \dots, n$  beschreibt einen Pfad durch  $\mathbb{Z}_+^2$  von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}_n$ , der sich in jedem Schritt nur nach rechts oder oben bewegt („r.-o.-Pfad“). Sei weiter  $p \in [0, 1]$  und seien  $W_{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^2$  u.i.v. mit  $\mathbb{P}_p(W_{\mathbf{x}} = 1) = p = 1 - \mathbb{P}_p(W_{\mathbf{x}} = 0)$  (auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ ). Wir nennen einen Punkt  $\mathbf{x}$  „offen“, wenn  $W_{\mathbf{x}} = 1$ , sonst „geschlossen“. Für  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}_+^2$  schreiben wir

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}, \quad \begin{array}{l} \text{wenn es } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ und einen r.-o.-Pfad } (\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ der Länge } n \text{ von } \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} \text{ nach} \\ \mathbf{x}_n = \mathbf{y} \text{ gibt mit } W_{\mathbf{x}_i} = 1 \text{ für } i = 0, 1, \dots, n. \end{array} \quad (1)$$

Für  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^2$  sei  $C_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_+^2 : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}\}$  das „Cluster“ der von  $\mathbf{x}$  aus durch offene r.-o.-Pfade erreichbaren Punkte.

Eine mögliche Interpretation dieses Modells ist der Transport von Flüssigkeit (längs einem in Richtung  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  weisenden Schwerfeld) in einem porösen Medium, siehe beispielsweise Kapitel 2.4 in A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie* (4. Aufl., Springer 2020) für mehr oder G. Grimmett, *Percolation* (Springer, 1999) für viel viel mehr Informationen (für den ungerichteten Fall).

a) Zeigen Sie: Für jedes  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^2$  ist  $\#C_{\mathbf{x}}$  eine Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ , deren Verteilung nicht von  $\mathbf{x}$  abhängt.

[Hinweis: Schreiben Sie  $\#C_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{y}} \mathbf{1}(\{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}\})$ .]

b) Sei  $\psi(p) := \mathbb{P}_p(\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^2} \{\#C_{\mathbf{x}} = \infty\})$ ,  $\theta(p) := \mathbb{P}_p(\#C_{\mathbf{0}} = \infty)$ . Zeigen Sie, dass  $\psi(p) \in \{0, 1\}$ , und folgern Sie, dass

$$\theta(p) > 0 \iff \psi(p) = 1.$$

[Hinweis: Argumentieren Sie beispielsweise, dass für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x} \in \{0, 1, \dots, n-1\}^2$  das Ereignis  $\{\#C_{\mathbf{x}} = \infty\}$  auch  $\bigcup_{i=0}^n (\{\#C_{(n,i)} = \infty\} \cup \{\#C_{(i,n)} = \infty\})$  nach sich zieht, verwenden Sie Kolmogorovs 0-1-Gesetz.]

c) Zeigen Sie:

$$[0, 1] \ni p \mapsto \theta(p)$$

ist nicht-fallend. Insbesondere gibt es also ein  $p_c \in [0, 1]$  so dass  $\psi(p) = 0$  für  $p < p_c$  und  $\psi(p) = 1$  für  $p > p_c$ .

[Hinweis: Betrachten Sie beispielsweise folgende (Kopplungs-)Konstruktion: Seien  $U_{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^2$  u.i.v.  $\sim \text{Unif}([0, 1])$ , und für  $p \in [0, 1]$  sei  $W_{\mathbf{x}}^{(p)} = \mathbf{1}(U_{\mathbf{x}} \leq p)$ . Dann sind die  $W_{\mathbf{x}}^{(p)}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^2$  verteilt wie die  $W_{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^2$  unter  $\mathbb{P}_p$  und es gilt  $W_{\mathbf{x}}^{(p)} \leq W_{\mathbf{x}}^{(p')}$  für  $0 \leq p \leq p' \leq 1$ .

Wir schreiben  $\mathbf{x} \rightarrow^p \mathbf{y}$ , falls es wie in (1) einen „offenen“ r.o.-Pfad von  $\mathbf{x}$  nach  $\mathbf{y}$  gibt, der nur Zwischenpunkte  $\mathbf{x}_i$  mit  $W_{\mathbf{x}_i}^{(p)} = 1$  benutzt. Welche Beziehung besteht dann zwischen den Ereignissen  $\{\mathbf{x} \rightarrow^p \mathbf{y}\}$  und  $\{\mathbf{x} \rightarrow^{p'} \mathbf{y}\}$ ?

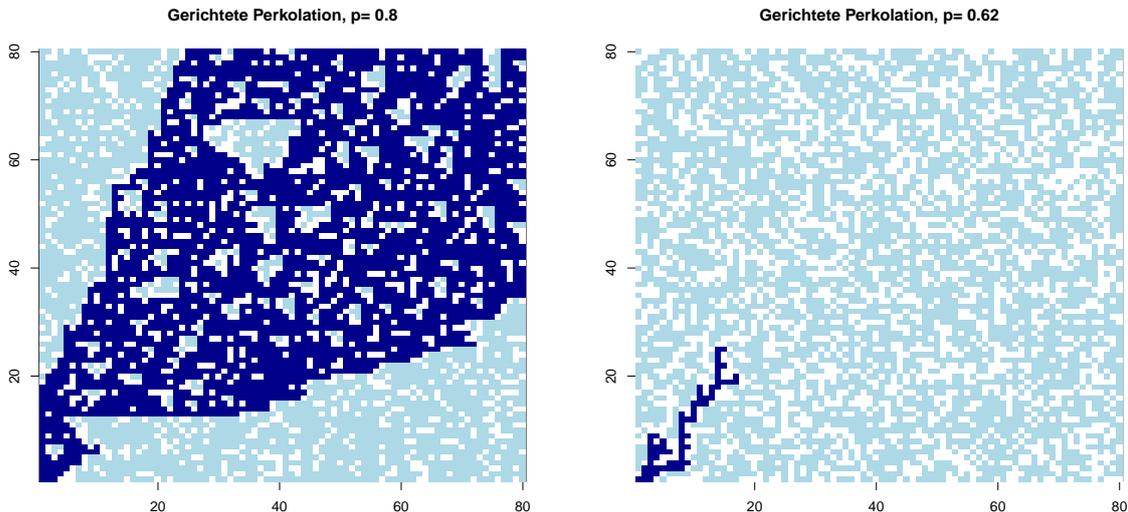


Abbildung 1: Gerichtete Perkolation: zwei Realisierungen mit unterschiedlichen  $p$ s

d) Zeigen Sie:  $p_c \geq 1/2$ .

[Hinweis: Argumentieren Sie beispielweise wie folgt:  $\{\#C_{\mathbf{0}} = \infty\} \subset \bigcap_n \bigcup_{\varphi \in R_n} \{W_{\varphi(i)} = 1, i = 0, \dots, n\}$ , wo  $R_n$  die Menge aller r.o.-Pfade  $\varphi = (\varphi(0), \dots, \varphi(n))$  mit  $n+1$  Knoten bezeichnet, die in  $\varphi(0) = \mathbf{0}$  beginnen.  $\#R_n = 2^n$ , für  $\varphi \in R_n$  gilt  $\mathbb{P}_p(W_{\varphi(i)} = 1, i = 0, \dots, n) = p^{n+1}$ .]

e) Zeigen Sie, dass  $p_c < 1$ .

[Anleitung: Einerseits gilt  $\mathbb{P}_p(\#C_{\mathbf{0}} = 0) = \mathbb{P}_p(W_{\mathbf{0}} = 0) = 1 - p$ .

Auf dem Ereignis  $\{0 < \#C_{\mathbf{0}} < \infty\}$  ist  $W_{\mathbf{0}} = 1$  und  $D := \bigcup_{\mathbf{y} \in C_{\mathbf{0}}} (\mathbf{y} + [-1/2, 1/2]^2)$  eine beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ , ihr Komplement  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  besitzt also genau eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente  $\tilde{D}$ . Der Rand  $\partial \tilde{D}$ , die „Kontur“ von  $C_{\mathbf{0}}$ , kann dargestellt werden als ein endlicher, sagen wir gegen den Uhrzeigersinn gerichteter, geschlossener Kantenzug (wobei jede Kante eine Kante in  $(\mathbb{Z} + 1/2)^2$  bildet), in dem vier Typen von gerichteten Kanten vorkommen:  $\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow$ . Am besten machen Sie sich die vorstehenden Aussagen anhand des unten stehenden Bildes (Abb. 2) klar.

Betrachten wir nun eine solche Kontur aus  $n$  Kanten, die wir an der linken unteren Ecke  $(-1/2, -1/2)$  beginnend abschreiten (notwendigerweise ist  $n$  gerade und  $\geq 4$ , die erste Kante vom Typ  $\rightarrow$ ). Es seien  $n_{\rightarrow}, n_{\uparrow}, n_{\leftarrow}, n_{\downarrow}$  (mit  $n_{\rightarrow} + n_{\uparrow} + n_{\leftarrow} + n_{\downarrow} = n$ ) die Anzahl darin enthaltener Kanten der vier

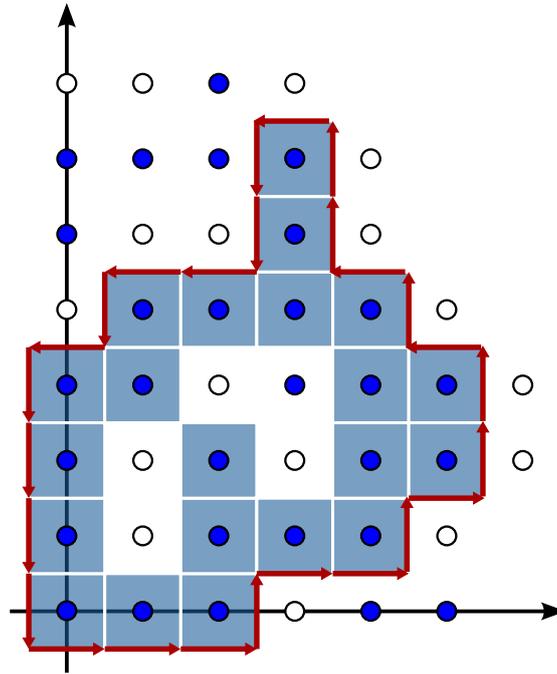


Abbildung 2: Eine Kontur umschließt  $C_0$  im Fall  $\#C_0 < \infty$ .

Typen. Begründen Sie: Es gilt  $n_{\rightarrow} = n_{\leftarrow}$ ,  $n_{\uparrow} = n_{\downarrow}$ , also  $n_{\uparrow} + n_{\leftarrow} = n/2$ , und für jede Kante der Typen  $\uparrow$  und  $\leftarrow$  muss nach Konstruktion für den Punkt  $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_+^2$  in Laufrichtung direkt rechts daneben  $W_{\mathbf{y}} = 0$  gelten (sonst wäre die Kante nicht im Rand des Clusters, siehe wiederum Bild). Da jedes  $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_+^2$  höchstens zweimal als rechter Nachbar einer  $\uparrow$ - oder  $\leftarrow$ -Kante in der Kontur vorkommen kann, bedeutet dies:

Zu jeder Kontur der Länge  $n$  gehören mindestens  $\lfloor n/4 \rfloor$  verschiedene  $\mathbf{y}$  mit  $W_{\mathbf{y}} = 0$ .

Zerlegen Sie nun das Ereignis  $\{0 < \#C_0 < \infty\}$  nach der Länge der Kontur von  $C_0$ , um folgende Abschätzung herzuleiten:

$$\mathbb{P}_p(0 < \#C_0 < \infty) \leq \frac{27p(1-p)}{1-9\sqrt{1-p}}, \quad p > 1-1/81.$$

(Beachten Sie, dass es höchstens  $3^{n-1}$  verschiedene Konturen der Länge  $n$  gibt; warum?). Folgern Sie aus dieser Abschätzung, dass

$$\mathbb{P}_p(\#C_0 < \infty) \leq (1-p) + \frac{27p(1-p)}{1-9\sqrt{1-p}} \tag{2}$$

und begründen Sie, dass die rechte Seite von (2) strikt kleiner als 1 ist für geeignete  $p$ . Können Sie aus (2) eine numerische obere Schranke für  $p_c$  herleiten?]