

Aufgabe 6.1 a) Auf $E = \mathbb{R}$ sei $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{i/n}$, $\mu := \lambda|_{[0,1]}$ die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf das Einheitsintervall. Zeigen Sie: $\mu = \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n$.

b) Auf $E = \mathbb{R}$ sei $\mu_n = \mathcal{N}(0, n)$ die Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz n , ν_1 das 0-Maß (d.h. $\nu_1(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$), $\nu_2 = \lambda$ das Lebesgue-Maß. Zeigen Sie: $\mu_n \xrightarrow{v} \nu_1$, aber (μ_n) konvergiert nicht schwach, sowie $\sqrt{2\pi n} \mu_n \xrightarrow{v} \nu_2$.

Aufgabe 6.2 a) Seien $g, g_1, g_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda)$ nicht-negativ mit $\int g \, d\lambda = \int g_n \, d\lambda = 1$ für alle n , wobei λ das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^d bezeichnet. Zeigen Sie:

$$g_n \rightarrow g \text{ } \lambda\text{-fast überall} \implies g_n \lambda \xrightarrow{w} g \lambda.$$

b) Seien X, X_1, X_2, \dots Zufallsvariablen mit Werten in \mathbb{Z} . Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{D} X \iff \forall z \in \mathbb{Z} : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = z) = \mathbb{P}(X = z).$$

Aufgabe 6.3 (Skorohod-Kopplung im reellwertigen Fall, 8 Punkte) Seien $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit $\mu = \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n$. Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und darauf reelle Zufallsvariablen X, X_1, X_2, \dots mit $\mathcal{L}(X) = \mu$, $\mathcal{L}(X_n) = \mu_n$ und $X_n \rightarrow X$ fast sicher für $n \rightarrow \infty$.

[Hinweis: Sei F_n die Verteilungsfunktion von μ_n und $F_n^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq t\}$ deren (verallgemeinerte) Inverse. Sei U uniform auf $[0, 1]$ verteilt, so ist $\mathcal{L}(F_n^{-1}(U)) = \mu_n$.]

Aufgabe 6.4 (Die Prohorov-Metrik metrisiert die Topologie der schwachen Konvergenz. 9+7 Punkte) Sei (E, d) metrischer Raum, für $B \subset E$, $\varepsilon > 0$ sei $B^\varepsilon := \{y \in E : d(y, B) < \varepsilon\}$. Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(E)$ sei

$$d_P(\mu, \nu) := \inf \{ \varepsilon > 0 : \mu(F) \leq \nu(F^\varepsilon) + \varepsilon \text{ für alle abgeschlossenen } F \subset E \} (\geq 0).$$

Zeigen Sie:

a) d_P ist eine Metrik, d.h.

i) $d_P(\mu, \nu) = d_P(\nu, \mu)$

ii) $d_P(\mu, \nu) = 0$ g.d.w. $\mu = \nu$

iii) $d_P(\nu, \nu') \leq d_P(\nu, \mu) + d_P(\mu, \nu')$

b) Sei E zusätzlich vollständig und separabel, dann gilt $\mu_n \xrightarrow{w} \mu \iff d_P(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$.

[Hinweise: a) Beachten Sie: $E \setminus F^\varepsilon$ ist abgeschlossen und $(E \setminus F^\varepsilon)^\varepsilon \subset E \setminus F$; die abgeschlossenen Teilmengen sind ein \cap -stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(E)$; für $\varepsilon, \delta > 0$ ist $\overline{F^{\varepsilon\delta}} = F^{\varepsilon+\delta}$.

b) Verwenden Sie das Portmanteau-Theorem; für „ \implies “ benutzen Sie auch, dass eine schwach konvergente Folge straff ist.]