

Aufgabe 7.1 (Eine reskalierte Koordinate eines uniform aus der Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ gezogenen Punkts ist approximativ standardnormalverteilt.) Sei $X^{(n)} = (X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})$ ein uniform aus der $(n-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ gezogener Punkt. Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{n}X_1^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1)$$

[Hinweis: Seien $Z_1, Z_2, \dots$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$, so ist

$$X^{(n)} \stackrel{d}{=} \left(\frac{Z_1}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_n^2}}, \frac{Z_2}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_n^2}}, \dots, \frac{Z_n}{\sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_n^2}} \right) \quad]$$

Aufgabe 7.2 a) (Approximation auf $[0, 1]$ via Bernstein-Polynome) Für $f \in C([0, 1])$ gilt

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

b) Die Voraussetzung im Satz von Stone-Weierstraß (Satz 3.23), dass E kompakt ist, ist notwendig.

[Hinweis: Konstruieren Sie z.B. auf $E = \mathbb{R}$ eine abzählbare Algebra $\mathcal{C}' \subset C_b(\mathbb{R})$, die Punkte trennend ist. $C_b(\mathbb{R})$ mit Supremumsnorm ist nicht separabel.]

Aufgabe 7.3 (4+4+4 Punkte) a) Sei $\mu_n = \mathcal{N}(a_n, b_n)$ mit $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$. Zeigen Sie:

$$\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist straff} \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty \text{ und } \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n < \infty$$

b) Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in \mathcal{M}_1([0, \infty))$ mit $m_P := \int x P(dx) \in (0, \infty)$ definiert

$$\hat{P}(A) := \frac{1}{m_P} \int_A x P(dx), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\hat{P}(A) \in \mathcal{M}_1([0, \infty))$, die sogenannte *größenverzernte* Verteilung von P .

Seien $(X_i)_{i \in I}$ nicht-negative Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_i] = 1$ für alle $i \in I$, $P_i := \mathcal{L}(X_i)$. Zeigen Sie:

$$\{\hat{P}_i : i \in I\} \text{ straff} \iff \{X_i : i \in I\} \text{ gleichgradig integrierbar.}$$

c) (E_1, d_1) und (E_2, d_2) metrische Räume, $E = E_1 \times E_2$ mit Produktmetrik $d((x, x'), (y, y')) = d_1(x, y) + d_2(x', y')$, $\pi_1 : E \rightarrow E_1$ und $\pi_2 : E \rightarrow E_2$ die Koordinatenprojektionen. Sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_1(E)$, dann gilt

$$\mathcal{H} \text{ ist straff} \iff \{\mu \circ \pi_1^{-1} : \mu \in \mathcal{H}\} \text{ und } \{\mu \circ \pi_2^{-1} : \mu \in \mathcal{H}\} \text{ sind straff}$$

b.w.

Aufgabe 7.4 (4+4+4 Punkte) a) Seien X, X', X'' unabhängig und identisch verteilt und es gelte

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} (X' + X'')/\sqrt{2}$$

Dann ist $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ für ein $\sigma^2 \geq 0$.

[*Hinweis.* Betrachten Sie die charakteristische Funktion φ_X .]

b) Sei $\alpha > 2$. Es gibt kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit charakteristischer Funktion $t \mapsto e^{-|t|^\alpha}$.

[*Hinweis.* Argumentieren Sie beispielsweise per Widerspruch: Nehmen Sie an, X hätte $\varphi_X(t) = e^{-|t|^\alpha}$, und bestimmen Sie Mittelwert und Varianz von X .]

c) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *positiv semi-definit*, wenn gilt

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} f(t_i - t_j) \geq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^d, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}.$$

Die charakteristische Funktion φ_μ eines endlichen Maßes $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ ist positiv semi-definit.

[*Bericht.* Nach einem Satz von Bochner (siehe z.B. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory*, Vol. 2, 2. ed., Wiley, 1971) ist jede stetige und positiv semi-definite Funktion die charakteristische Funktion eines endlichen Maßes auf $\mathbb{R}^d$.]