Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastik II: Übungen und Ergänzungen **WS 2024/25**

Blatt 8

Aufgabe 8.1 (ein elementarer Blick auf den Poissonprozes auf $\mathbb{R}_+$) Sei $c_N \longrightarrow_{N\to\infty} 0$ eine Nullfolge, $\lambda > 0$, $Z_i^{(N)}$, $i \in \mathbb{N}$ u.i.v. $\sim \mathrm{Ber}(\lambda c_N)$ (wir betrachten o.E. nur so große N, dass $\lambda c_N \leqslant 1$), seien

$$T_0^{(N)} := 0, \quad T_\ell^{(N)} := \inf\big\{i > T_{\ell-1}^{(N)} : Z_i^{(N)} = 1\big\},\ \ell \in \mathbb{N}$$

($T_\ell^{(N)}$ ist der Zeitpunkt des ℓ-ten Erfolgs in der Münzwurffolge $(Z_i^{(N)})_{i\in\mathbb{N}}$), dann sind

$$\tau_\ell^{(N)} := T_\ell^{(N)} - T_{\ell-1}^{(N)},\ \ell \in \mathbb{N}$$

u.i.v., $\tau_\ell^{(N)} \sim \mathrm{geom}(\lambda c_N)$, d.h. $\mathbb{P}(\tau_\ell^{(N)} = j) = c_N\lambda(1-c_N\lambda)^{j-1}$ für $j \in \mathbb{N}$ und für $x \geqslant 0$ gilt

$$\mathbb{P}(c_N\tau_\ell^{(N)} > x) = \mathbb{P}\big(\tau_\ell^{(N)} > \lfloor \frac{x}{c_N} \rfloor\big) = \big(1-c_N\lambda\big)^{\lfloor x/c_N\rfloor} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda x},$$

d.h. $c_N\tau_\ell^{(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{d} \mathrm{Exp}(\lambda)$

a) Beweisen Sie diese Aussagen.

Sei weiter

$$M_k^{(N)} := \big|\{1 \leqslant i \leqslant k : Z_i^{(N)} = 1\}\big| = \max\{\ell \in \mathbb{N}_0 : T_\ell^{(N)} \leqslant k\},$$

offenbar gilt für $0 \leqslant k_0 < k_1 < \cdots < k_m$

$$M_{k_1}^{(N)} - M_{k_0}^{(N)}, M_{k_2}^{(N)} - M_{k_1}^{(N)}, \dots, M_{k_m}^{(N)} - M_{k_{m-1}}^{(N)} \quad \text{sind unabhängig}$$

und für $0 \leqslant k < k'$ ist $M_{k'}^{(N)} - M_k^{(N)} \sim \mathrm{Bin}(k'-k, c_N\lambda)$, somit gilt für $0 \leqslant t < t'$

$$M_{\lfloor t'/c_N\rfloor}^{(N)} - M_{\lfloor t/c_N\rfloor}^{(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{d} \mathrm{Pois}\big(\lambda(t'-t)\big).$$

b) Beweisen Sie diese Aussagen.

Dies lädt ein, folgendes Limesobjekt zu betrachten: Sei $\tau_1, \tau_2, \dots$ u.i.v., $\tau_\ell \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $T_0 := 0$, $T_\ell := \tau_1 + \cdots + \tau_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$,

$$M_t := \max\{i \in \mathbb{N}_0 : T_i \leqslant t\}, \quad t \in [0,\infty)$$

der stochastische Prozess $(M_t)_{t\geqslant 0}$ heißt *Poissonprozess* mit Rate λ. (Beachte: die Definition ist so eingerichtet, dass $t \mapsto M_t$ rechtsstetig ist, man sagt auch: $(M_t)_t$ hat rechtsstetige Pfade.)

c) Argumentieren Sie: Aus obigen Überlegungen folgt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\big(c_N\tau_1^{(N)}, \dots, c_N\tau_m^{(N)}\big) \xrightarrow[N\to\infty]{d} \big(\tau_1, \dots, \tau_m\big),$$

$$\big(c_N T_1^{(N)}, \dots, c_N T_m^{(N)}\big) \xrightarrow[N\to\infty]{d} \big(T_1, \dots, T_m\big)$$

somit ergibt sich für $t_1 < t_2 < t_m$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}\big(M_{\lfloor t_1/c_N\rfloor}^{(N)} = k_1, \dots, M_{\lfloor t_m/c_N\rfloor}^{(N)} = k_m\big) = \mathbb{P}\big(T_{k_1}^{(N)} \leqslant \lfloor t_1/c_N\rfloor < T_{k_1+1}^{(N)}, \dots, T_{k_m}^{(N)} \leqslant \lfloor t_m/c_N\rfloor < T_{k_m+1}^{(N)}\big)$$
$$\xrightarrow[N\to\infty]{d} \mathbb{P}\big(T_{k_1} \leqslant t_1 < T_{k_1+1}, \dots, T_{k_m} \leqslant t_m < T_{k_m+1}\big) = \mathbb{P}\big(M_{t_1} = k_1, \dots, M_{t_m} = k_m\big),$$

d.h. die Folge von stochastischen Prozessen $(M^{(N)}_{\lfloor t/c_N \rfloor})_{t\geqslant 0}$ konvergiert gegen den Prozess $(M_t)_{t\geqslant 0}$ im Sinne der endlich-dimensionalen Verteilungen.

Aus diesen Beobachtungen folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(M_{t_1} - M_{t_0} = j_1, M_{t_2} - M_{t_1} = j_2 \dots, M_{t_m} - M_{t_{m-1}} = j_m\big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big(M^{(N)}_{\lfloor t_1/c_N \rfloor} - M^{(N)}_{\lfloor t_0/c_N \rfloor} = j_1, \dots, M^{(N)}_{\lfloor t_m/c_N \rfloor} - M^{(N)}_{\lfloor t_{m-1}/c_N \rfloor} = j_m\big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\big(M^{(N)}_{\lfloor t_1/c_N \rfloor} - M^{(N)}_{\lfloor t_0/c_N \rfloor} = j_1\big) \times \cdots \times \mathbb{P}\big(M^{(N)}_{\lfloor t_m/c_N \rfloor} - M^{(N)}_{\lfloor t_{m-1}/c_N \rfloor} = j_m\big) \\
&= \prod_{i=1}^{m} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1}))^{j_i}}{j_i!},
\end{aligned}$$

d.h. die Inkremente eines Poissonprozesses (M_t) sind Poissonverteilt [der Parameter ist $\lambda\times$ die Länge des betrachteten Zeitintervalls] und Inkremente über jeweils disjunkte Zeitintervalle sind unabhängig. Diese beiden Eigenschaften charakterisieren den Poissonprozess [ggfs. mit Forderung der Rechtsstetigkeit].

d) Zeigen Sie: Der Parameter λ kann als Sprungrate interpretiert werden in dem Sinne, dass für ein (kurzes) Zeitintervall $(t, t+h]$ die Wahrscheinlichkeit, einen Sprung in diesem Zeitintervall zu sehen, $\approx \lambda \times$ Intervalllänge ist, genauer

$$\mathbb{P}\big(M_{t+h} = k+1 \,\big|\, M_t = k\big) = \mathbb{P}\big(M_{t+h} - M_t = 1\big) = e^{-\lambda h}\frac{\lambda h}{1!} = \lambda h + O(h^2) \quad \text{für } h \downarrow 0.$$

Aufgabe 8.2 a) Zeigen Sie: $\mu_1 := \mathrm{Unif}[-a, a]$, die uniforme Verteilung auf $[-a, a]$ hat charakteristische Funktion $\varphi_{\mu_1}(t) = \sin(at)/at$, die Dreiecksverteilung $\mu_2 := \mathrm{Tri}_a$ mit Dichte $\frac{1}{b}(1 - |x|/b)^+$ (für ein $b > 0$) hat charakteristische Funktion $\varphi_{\mu_2}(t) = 2\frac{1-\cos(bt)}{b^2t^2}$. Die Verteilung μ_3 mit Dichte $\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos(bx)}{bx^2}$ auf $\mathbb{R}$ (manchmal Pólyas Verteilung genannt) hat charakteristische Funktion $\varphi_{\mu_3}(t) = (1 - |t|/b)^+$.

b) Seien $X_1, \dots, X_n$ reelle Zufallsvariablen, A u.a. von $(X_1, \dots, X_n)$ mit $\mathbb{P}(A = i) = p_i$, $i = 1, \dots, n$ ($p_i \geqslant 0$, $p_1 + \cdots + p_n = 1$), so gilt für $Y := X_A$

$$\varphi_Y(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \varphi_{X_i}(t).$$

c) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine symmetrische Funktion mit $f(0) = 1$, so dass der Graph von $f|_{[0,\infty)}$ ein konvexer Polygonzug mit endlich vielen „Knickstellen“ ist. Dann gibt es eine reelle Zufallsvariable X mit $\varphi_X = f$.

d) Folgern Sie *Pólyas Kriterium*: Für jede symmetrische Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $f(0) = 1$, die auf $[0, \infty)$ konvex ist, gibt es eine reelle Zufallsvariable X mit $\varphi_X = f$. Insbesondere ist $f(t) = \exp(-|t|^\alpha)$ für $\alpha \in (0, 1]$ eine charakteristische Funktion.

[*Hinweise*: a) Sie können die Dreiecksverteilung als Faltung von zwei uniformen Verteilungen darstellen.

c) Stellen Sie f als geeignete Konvexkombination von endlich vielen Funktionen des Typs $(1-|t|/b)^+$ dar.]

Aufgabe 8.3 Sei Π_n eine uniform verteilte Permutation von $\{1, \dots, n\}$ und S_n die Anzahl Zyklen von Π_n (d.h. die Anzahl der Orbits von Π_n, als Selbstabbildung von $\{1, \dots, n\}$ aufgefasst). Zeigen Sie:

$$\frac{S_n}{\log n} \xrightarrow{\mathcal{D}} 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{S_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

[*Hinweis.* Sei $A_{n,\ell} := \{(\Pi_n)^m(\ell) \geqslant \ell \text{ für alle } m \in \mathbb{N}\}$ das Ereignis, dass ℓ die kleinste Zahl in dem Zyklus ist, der ℓ enthält, $X_{n,\ell} := \mathbf{1}(A_{n,\ell})$. Zeigen Sie zunächst:

$$X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,n} \text{ sind unabhängig mit } \mathbb{P}(X_{n,\ell} = 1) = 1/\ell.$$

Hierzu kann es hilfreich sein, sich Π_n auf folgende Weise generiert zu denken: Die Zahlen $1, \ldots, n$ betreten in aufsteigender Reihenfolge ein zunächst leeres Restaurant mit vielen runden Tischen, 1 setzt sich an einen der Tische. Seien bereits $1, \ldots, \ell - 1$ angekommen. Dann setzt sich ℓ rechts von k an den Tisch, an dem k sitzt, wenn es ein $k < \ell$ gibt mit $\Pi_n(k) = \ell$. Wenn es kein solches k gibt, setzt sich ℓ an einen neuen, bisher freien Tisch. Die Anzahl Zyklen ist dann die Anzahl der besetzten Tische, nachdem n Platz genommen hat.]

Aufgabe 8.4 (3+3 Punkte) a) Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ gemeinsam n-dimensional normalverteilt, $1 \leqslant m < n$. Dann gilt

i) $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig $\iff$ $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ für $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, und

ii) $(Y_1, \ldots, Y_m)$ unabhängig von $(Y_{m+1}, \ldots, Y_n)$ $\iff$ $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$ für $1 \leqslant i \leqslant m < j \leqslant n$.

b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ u.i.v. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\overline{M} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ihr empirisches Mittel und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{M})^2$ die (korrigierte) Stichprobenvarianz. Dann sind $\overline{M}$ und S^2 unabhängig.

[*Hinweis*: Betrachten Sie den zufälligen Vektor $(\overline{M}, X_1 - \overline{M}, X_2 - \overline{M}, \ldots, X_n - \overline{M})$.]

Aufgabe 8.5 (Explizite Fourier-Inversion in Spezialfällen, 6+6+6 Punkte) a) Sei X eine $\mathbb{Z}^d$-wertige Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ_X. Dann hat φ_X Periode $2\pi\mathbb{Z}^d$, d.h. $\varphi_X(t + 2\pi m) = \varphi_X(t)$ für $t \in \mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{Z}^d$. Es gilt die Fourier-Inversionsformel

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{(-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle x,t\rangle} \varphi_X(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{Z}^d$$

(Übrigens: Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion φ_X. X heißt gitterverteilt, wenn es $a, d \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathbb{P}(X \in a + d\mathbb{Z}) = 1$. Es gilt

$$X \text{ gitterverteilt} \iff \exists\, u \neq 0 : |\varphi_X(u)| = 1$$

Wenn Sie möchten, beweisen Sie das auch.)

b) Sei $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit charakteristischer Funktion φ_μ und es gelte $\varphi_\mu \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. Dann hat μ eine stetige beschränkte Dichte $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$, gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_\mu(t)\, dt.$$

c) Für $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mit charakteristischer Funktion φ_μ und $-\infty < a < b < \infty$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_\mu(t)\, dt \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\})$$

[*Hinweise*: a) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{Z}^d$ gilt $\int_{(-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle x,t\rangle}\, dt = (2\pi)^d \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$.

b) Betrachten Sie zunächst den Fall der Normalverteilung, $\mathcal{N}(0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, dann $\mu_\varepsilon := \mu * \mathcal{N}(0,\varepsilon)$. Zeigen Sie, dass μ_ε eine Dichte f_ε besitzt, die punktweise gegen f konvergiert.

c) Die zentrale Beobachtung ist, dass

$$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx}\, dt = \int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-a))}{t}\, dt - \int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-b))}{t}\, dt$$
$$\xrightarrow[T\to\infty]{} \pi\big(\mathbf{1}_{\{a\}} + 2\mathbf{1}_{(a,b)} + \mathbf{1}_{\{b\}}\big)(x)$$

gilt. Mit $\operatorname{sgn}(u) := \mathbf{1}_{(0,\infty)}(u) - \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(u)$ für $u \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$\int_{-T}^{T} \frac{\sin(tu)}{t}\, dt = 2\operatorname{sgn}(u) \int_{0}^{T|u|} \frac{\sin(r)}{r}\, dr \xrightarrow[T\to\infty]{} 2\operatorname{sgn}(u) \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(r)}{r}\, dr = \pi \operatorname{sgn}(u)$$

Details finden sich beispielsweise in Section 3.3 des Buch von R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5th ed., Cambridge University Press, 2019.]

Frohe Weihnachten 2024 und einen
guten Rutsch ins neue Jahr!