

Aufgabe 9.1 Die negative Binomialverteilung mit Parametern $r > 0$, $p \in (0, 1)$ hat Gewichte

$$b_{r,p}^-(k) = \binom{-r}{k} (-1)^k p^r (1-p)^k, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

(wobei $\binom{-r}{k} = (-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)/k!$; für $r \in \mathbb{N}$ ist $b_{r,p}^-$ die Verteilung der Anzahl Misserfolge in einer p -Münzwurffolge vor dem r -ten Erfolg). Stellen Sie $b_{r,p}^-$ als $\text{CPoi}_{r\nu}$ mit $\nu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{N})$, $\nu(\ell) = \frac{(1-p)^\ell}{\ell}$ dar und folgern Sie, dass $b_{r,p}^-$ unendlich teilbar ist.

Aufgabe 9.2 Sei $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und F für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \begin{cases} 2(1 - \Phi(1/\sqrt{x})) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: F ist die Verteilungsfunktion einer strikt stabilen Verteilung μ zum Index $1/2$, insbesondere ist μ unendlich teilbar.

[Hinweis. Bestimmen Sie die Dichte von F und zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierte die Gestalt $\lambda \mapsto e^{-\sqrt{2\lambda}}$ hat.]

Aufgabe 9.3 (6+6 Punkte) a) (Beweisdetails für Beobachtung 5.10 der Vorlesungsnotizen) Sei μ unendlich teilbar mit kanonischem Tripel (b, σ^2, ν) . Dann gilt

$$\nu = \text{v-lim}_{n \rightarrow \infty} n\mu^{*\frac{1}{n}}|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}.$$

[Hinweis. Stellen Sie $\mu^{*\frac{1}{n}}$ wie in der Vorlesung als Verteilung von

$$b/n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z + X_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} (X_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)})$$

dar. Schätzen Sie $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=m}^{\infty} (X_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)})\right| \geq \varepsilon\right)$ beispielsweise mittels der Chebyshev-Ungleichung ab und verwenden Sie $\mathbb{P}(|Z| \geq z) \leq z^{-4} \mathbb{E}[Z^4] = 3/z^4$.]

b) Sei X eine reellwertige, unendlich teilbare Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(|X| \leq K) = 1$ für ein $K \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass X dann fast sicher konstant ist.

[Hinweis. Betrachten Sie o.E. den Fall $\mathbb{E}[X] = 0$. Nach Voraussetzung gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ u.i.v. Zufallsvariablen $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ mit $X \stackrel{d}{=} X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$. Folgern Sie, dass dann $\mathbb{P}(X_{n,1} < -K/n) = 0$ und $\mathbb{P}(X_{n,1} > K/n) = 0$ gilt und nutzen Sie diese Information, um die Varianz von X abzuschätzen.]

b.w.

Aufgabe 9.4 (Lévy-Khinchin-Formel im nicht-negativen Fall, 6+6 Punkte) a) Sei $\mu \in \mathcal{M}_1([0, \infty))$ unendlich teilbar. Zeigen Sie: Dann gibt es $\alpha \geq 0$ und ein σ -endliches Maß ν auf $(0, \infty)$ mit $\int_{(0, \infty)} (x \wedge 1) \nu(dx) < \infty$, so dass

$$-\log \left(\int e^{-\lambda x} \mu(dx) \right) = \alpha t + \int (1 - e^{-tx}) \nu(dx), \quad t \geq 0 \quad (*)$$

gilt.

[*Hinweis.* Approximieren Sie μ mittels geeigneten CPoi_{ν_n} analog zum in der Vorlesung behandelten Fall.]

b) Seien α und ν wie in a) gegeben, dann gibt es ein unendlich teilbares $\mu \in \mathcal{M}_1([0, \infty))$ mit Log-Laplacetransformierter (*).

[*Hinweis.* Sie können μ als Verteilung der Summe der Konstante α und einer f.s. konvergenten Reihe von positiven compound Poisson-Zufallsvariablen gewinnen.]