Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastik II: Übungen und Ergänzungen **WS 2024/25**

Blatt 10

Aufgabe 10.1 Arbeiten Sie den Beweis von Satz 6.5 der Vorlesungsnotizen aus:

Sei (E, d) ein separabler, vollständiger metrischer Raum. Dann gibt es $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und eine Bijektion $\varphi : E \to B$, sodass φ und φ^{-1} beide messbar sind.

Aufgabe 10.2 a) Seien $X_1, X_2, \dots \geqslant 0$ und $X \geqslant 0$ nichtnegative Zufallsvariablen mit zugehöriger Laplace-Transformierter

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}[e^{-\lambda X_n}], \quad \lambda \geqslant 0$$

und analog ψ_n die Laplace-Transformierte von X_n. Zeigen Sie

$$\psi_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(\lambda) \text{ für } \lambda \geqslant 0 \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$$

b) Sei $(S_n)_n$ eine einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit Start in $S_0 = 0$,

$$R_k := \inf\big\{n \in \mathbb{N} : \#\{0 < j \leqslant n : S_n = 0\} \geqslant k\big\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

der Zeitpunkt der k-ten Rückkehr zur 0, $R_0 := 0$. Zeigen Sie:

$$\frac{R_k}{k^2} \xrightarrow[k\to\infty]{d} Y$$

wobei $Y \geqslant 0$ stabil mit Index $1/2$ ist.

[*Hinweis.* a) Zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_n$ straff ist und argumentieren Sie dann wie im Beweis von Satz 3.27 der Vorlesungsnotizen. Beachten Sie: ψ_n ist nicht-wachsend und ψ ist stetig in 0 mit $\psi(\lambda) = 1$, folgern Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\lambda_0 > 0$ gibt mit $\psi_n(\lambda) \geqslant 1 - \varepsilon$ für $n \geqslant n_0$ und $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$. Dann ist

$$1 - \varepsilon \leqslant \mathbb{E}[e^{-\lambda_0 X_n}] \leqslant \mathbb{P}(X_n < 1/\lambda_0) + e^{-1}\mathbb{P}(X_n \geqslant 1/\lambda_0) = 1 - (1 - e^{-1})\mathbb{P}(X_n \geqslant 1/\lambda_0)$$

für $n \geqslant n_0$.

b) Es ist $R_k = \sum_{j=1}^{k}(R_j - R_{j-1})$ mit u.i.v. $R_j - R_{j-1}$. Verwenden Sie z.B. die Anleitung zu Aufgabe 0.3, um die Laplace-Transformierte von $(R_j - R_{j-1})$ zu bestimmen.

Übrigens: Wenn Sie möchten, können Sie zudem Aufgabe 9.2 verwenden, um die Dichte von Y zu bestimmen.]

Aufgabe 10.3 (6 Punkte) Sei X symmetrisch stabil mit Index $\alpha \in (0, 2]$ und $\mathbb{E}[e^{itX}] = \exp(-|t|^\alpha)$, davon unabhängig $Y \sim \mu$ mit $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}_+)$. Dann ist

$$\mathbb{E}[e^{itXY^{1/\alpha}}] = \int_{[0,\infty)} \exp(-y|t|^\alpha)\,\mu(dy), \quad t \in \mathbb{R}$$

Wenn weiter $Y > 0$ einseitig strikt stabil mit Index $\beta \in (0, 1)$ ist, so ist $XY^{1/\alpha}$ symmetrisch stabil mit Index $\alpha\beta$.

Aufgabe 10.4 (6+6+6 Punkte) a) Sei X reelle ZV mit charakteristischer Funktion φ_X. Argumentieren Sie wie im Beweis von Satz 3.27 der Vorlesungsnotizen um zu zeigen, dass

$$\mathbb{P}(|X| > x) \leqslant \frac{x}{1 - \sin(1)} \int_0^{1/x} 1 - \mathrm{Re}(\varphi_X(t))\, dt, \quad x > 1$$

gilt.

b) Sei X stabil mit Index $\alpha \in (0, 2)$, d.h. X hat kanonisches Tripel $(b, 0, \nu)$, wobei

$$\nu(dx) = c_- \mathbf{1}_{\{x<0\}} |x|^{-\alpha-1}\, dx + c_+ \mathbf{1}_{\{x>0\}} |x|^{-\alpha-1}\, dx$$

mit $c_+, c_- \geqslant 0$ und $c_+ + c_- > 0$. Verwenden Sie a) und Bericht 5.17 der Vorlesungsnotizen, um zu zeigen, dass es eine Konstante $C < \infty$ gibt, so dass für $x \geqslant 1$ gilt

$$\mathbb{P}(|X| > x) \leqslant \frac{C}{x^\alpha}$$

Folgern Sie, dass $\mathbb{E}[|X|^\beta] < \infty$ für $0 \leqslant \beta < \alpha$ gilt.

c) Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass für die stabile ZV X aus b) gilt

$$\mathbb{P}(|X| > x) \geqslant \frac{c}{x^\alpha}$$

und folgern Sie, dass $\mathbb{E}[|X|^\alpha] = \infty$.

[*Hinweis.* c) Verwenden Sie eine Darstellung wie in Beobachtung 5.7 der Vorlesungsnotizen.]