Prof. Dr. Matthias Birkner JGU Mainz

Stochastik II: Übungen und Ergänzungen **WS 2024/25**

Blatt 11

Aufgabe 11.1 a) Sei $E = \{0,1\}$, $(X_t)_{t\geqslant 0}$ sei Markovkette auf E mit Generatormatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in (0,\infty)$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}_0(X_t = 0) = e^{-(a+b)t} + \big(1 - e^{-(a+b)t}\big)\frac{b}{a+b}, \tag{1}$$

$$\mathbb{P}_1(X_t = 1) = e^{-(a+b)t} + \big(1 - e^{-(a+b)t}\big)\frac{a}{a+b}. \tag{2}$$

[*Hinweis*: Lösen Sie beispielsweise die Kolmogorovschen Rückwärtsgleichungen.]

b) (Yule-Prozess) Auf $E = \mathbb{N}$ betrachten wir die Generatormatrix $Q = (Q(i,j))_{i,j\in\mathbb{N}}$ mit

$$Q(i,j) = \begin{cases} \gamma i, & j = i+1 \\ -\gamma i, & j = i \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und einem $\gamma > 0$. Man kann sich den zugehörigen Markov-Prozess $(X_t)_{t\geqslant 0}$ folgendermaßen vorstellen: Teilchen vermehren sich unabhängig mit Rate γ, d.h. ein aktuell existierendes Teilchen verdoppelt sich nach einer $\mathrm{Exp}(\gamma)$-verteilten Wartezeit, die beiden Nachkommen verhalten sich danach genauso, unabhängig voneinander und von allen anderen Teilchen; X_t beschreibt dann die Anzahl Teilchen zur Zeit $t \geqslant 0$.

Zeigen Sie: $T_t(1,k) = e^{-\gamma t}(1 - e^{-\gamma t})^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ löst die zu Q zugehörige Kolmogorovsche Vorwärtsgleichung. (Demnach: bei Start in $X_0 = 1$ ist X_t geometrisch verteilt mit Parameter $e^{-\gamma t}$.)

Aufgabe 11.2 Sei (b, σ^2, ν) das kanonische Tripel einer unendlich teilbaren Verteilung,

$$\psi(u) = ibu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int \big(e^{iux} - 1 - \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x)\cdot iux\big)\, \nu(dx)$$

und $(\nu_t)_{t\geqslant 0}$ die zugehörige Faltungshalbgruppe, d.h. ν_t hat charakteristische Funktion $\varphi_{\nu_t}(u) = \exp(t\psi(u))$, $t \geqslant 0$, und $T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\kappa_t(x,dy)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ die zugehörigen Übergangsoperatoren.

a) Zeigen Sie: $x \mapsto T_t f(x)$ ist stetig für stetiges und beschränktes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $||f||_\infty, ||f'||_\infty, ||f''||_\infty < \infty$. Dann gilt

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t f(x) - T_0 f(x)}{t} = bf'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \int_{\mathbb{R}} \big(f(x+y) - f(x) - y\mathbf{1}_{\{|y|<1\}} f'(x)\big)\, \nu(dh), \quad x \in \mathbb{R}$$

[*Hinweis*: Verwenden Sie z.B. eine Darstellung wie in Beobachtung 5.7 der Vorlesungsnotizen. Betrachten Sie für b) die Taylorentwicklung von f in x bis zur zweiten Ordnung.]

b.w.

Aufgabe 11.3 (Ornstein-Uhlenbeck-Halbgruppe, 3+3+3 Punkte) Mit $a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sei für $t > 0$ der Kern κ_t von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (jeweils mit $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ versehen) gegeben durch

$$\kappa_t(x, \cdot\,) = \mathcal{N}\big(xe^{-at}, \sigma^2(1 - e^{-2at})/(2a)\big), \quad x \in \mathbb{R}$$

und $\kappa_0(x, \cdot\,) = \delta_x$.

a) Überprüfen Sie: $(\kappa_t)_{t \geqslant 0}$ ist eine Markov-Halbgruppe.

b) Die zugehörigen Übergangsoperatoren $T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \kappa_t(x, dy)$ erfüllen $x \mapsto T_t f(x)$ ist stetig für stetiges und beschränktes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $||f||_\infty, ||f'||_\infty, ||f''||_\infty < \infty$. Dann gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f(x) - T_0 f(x)}{t} = -axf'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

[*Hinweis*: c) Betrachten Sie die Taylorentwicklung von f in x bis zur zweiten Ordnung.]

Aufgabe 11.4 (Wann ist das Bild einer Markovkette wieder eine? 3+4+2+6 Punkte) Sei $(X_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ eine (zeitdiskrete) Markovkette auf der (höchstens) abzählbaren Menge E mit Übergangsmatrix $(p(x, y))_{x,y \in E}$ und Startverteilung $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$, weiter sei $f : E \to E'$ eine Abbildung von E in die (höchstens) abzählbare Menge E'. Wir definieren die Folge von Zufallsvariablen $Y = (Y_n)_n$ durch $Y_n := f(X_n)$, $n = 0, 1, 2 \ldots.$

a) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass im Allgemeinen Y keine Markovkette ist.

b) Finden Sie Bedingungen, damit Y eine Markovkette ist. Wie sieht die Übergangsmatrix von Y aus?

c) Wie sehen diese Bedingungen im Fall zeitkontinuierlicher Markovketten aus?

d) Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. $\mathbb{Z}$-wertig, $p(x) := \mathbb{P}(X_1 = x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Wir setzen $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $\mathcal{F}_n := \sigma(S_1, \ldots, S_n)$, $M_n := \max_{0 \leqslant j \leqslant n} S_j$, $Z_n := M_n - S_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots.$ Zeigen Sie:

(i) $(M_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ ist keine Markovkette (bezüglich irgendeiner Filtration).

(ii) $(M_n, S_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ ist eine $\mathbb{Z}^2$-wertige Markovkette (bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,2,\ldots}$). Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlicheiten

$$\mathbb{P}\big((M_{n+1}, S_{n+1}) = (x', y') \,\big|\, (M_n, S_n) = (x, y)\big), \quad x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$$

(iii) $Z = (Z_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ ist eine $\mathbb{Z}_+$-wertige Markovkette bezüglich $(\sigma(Z_k : k \leqslant n))_{n=0,1,2,\ldots}$. Ist Z auch Markovsch bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n=0,1,2,\ldots}$?

[*Hinweise*: a) Sie können $\#E = 3$ betrachten oder sich spannendere, komplexere Beispiele überlegen. b) Betrachten Sie die Äquivalenzrelation $\sim$ auf E, $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$ (und sei $[x] := \{x' \in E : x' \sim x\} = f^{-1}(f(\{x\}))$ die zugehörige Äquivalenzklasse). Nehmen wir an, wir haben $Y_0 = y_0, \ldots, Y_n = y_n$ beobachtet. Was sagt das über X_n? Damit die bedingte Verteilung von Y_{n+1} nur von y_n abhängt, nicht aber von den $y_0, \ldots, y_{n-1}$, welche Eigenschaft muss $p(\cdot, \cdot)$ haben?]