Kapitel 4

Gesetz der großen Zahlen

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[X_1]$$

(in geeign. Sinn, unter geeign. Voraus-setzungen)

Erinnerung 4.1 (Varianz und Kovarianz)**.** $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ W'raum, $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$.

$$\operatorname{Var}[X] := \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])^2\big] = \mathbb{E}\big[X^2\big] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 \;\; (\geq 0), \quad \text{die } \textit{Varianz} \text{ von } X$$

($\sqrt{\operatorname{Var}[X]}$ ist die *Streuung* oder *Standardabweichung* von X)

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}[X, Y] &:= \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\big] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \;\; \big(= \operatorname{Cov}[X, Y]\big), \qquad \text{die } \textit{Kovarianz} \text{ von } X \text{ und } Y \end{aligned}$$

$$\big(= \operatorname{Cov}[Y, X] \big)$$

Für $X, Y, Z \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Cov}[aX + bY, Z] = a\mathrm{Cov}[X, Z] + b\mathrm{Cov}[Y, Z]$$

(die Kovarianz ist eine symmetrische Bilinearform), insbesondere gilt

$$\mathrm{Var}[aX] = \mathrm{Cov}[aX, aX] = a^2\mathrm{Var}[X].$$

X und Y heißen *unkorreliert*, wenn $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$; für paarweise unkorrelierte $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ gilt

$$\mathrm{Var}[X_1 + \cdots + X_n] = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{Cov}[X_i, X_j] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i].$$

$$= \mathrm{Cov}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right]$$

Erinnerung 4.2. $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ unabhängig $\Longrightarrow$ X, Y unkorreliert.
Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

Denn X, Y u.a., $\underbrace{\mathbb{E}[X \cdot Y]}_{= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]} - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 0$

$\mu_X(A) = P(X \in A)$

„Gegen"-Beispiel.

X reelle ZV mit $\mathbb{E}[X^4] < \infty$ und $X \overset{d}{=} -X$ $\quad = (\mu \circ X^{-1})(A)$

(z.B. $X \sim \mathcal{N}_{0,1}$)

$Y := X^2$, dann ist $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X^3] = 0$

$\neq \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X^2]$

(denn X^3 ist symm. um 0 verteilt,

d.h. X und Y sind unkorr., aber <u>nicht</u> u.a.

Erinnerung 4.3 (Chebyshev[1]-Ungleichung)**.** Für $X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ und $a > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a\big) \leq \frac{\operatorname{Var}[X]}{a^2}$$

$$\Big(\text{denn } \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]| \geq a) = \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|^2 \geq a^2) \underset{\text{Markov-Ungl. (Beob. 3.3)}}{\leq} \frac{1}{a^2}\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \frac{\operatorname{Var}[X]}{a^2}\Big)$$

Erinnerung 4.4 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen via Chebyshev-Ungleichung)**.** $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ paarweise unkorrelierte ZVn mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$, $\sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_i^2] =: c < \infty$, dann gilt für $S_n := X_1 + \dots + X_n$

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \mathbb{P}\text{-stochastisch}$$

Dazu: Sei $\varepsilon > 0$

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\left|\tfrac{1}{n} S_n - 0\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon n) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \underbrace{\operatorname{Var}[S_n]}_{= \operatorname{Var}[X_1] + \dots + \operatorname{Var}[X_n] \leq c \cdot n} \leq \frac{c}{\varepsilon^2 \cdot n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

[1] Pafnuty Lvovich Chebyshev, 1821–1894.

Proposition 4.5. *Seien $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ paarweise unabhängige ZVn mit $\sup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_i^2] =: c < \infty$, es gelte $\mathbb{E}[X_n^+] \to \mu_+ \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[X_n^-] \to \mu_- \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $S_n := X_1 + \dots + X_n$*

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu := \mu_+ - \mu_- \quad \textit{fast sicher.}$$

$\mathrm{Var}[X_i - \mu_i] = \mathrm{Var}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2$

Bew.:

O.E. seien alle $X_i \geq 0$ (und damit $\mu_i = \mu_i^+$) (ansonsten zerlege $X_i = X_i^+ - X_i^-$, argumentiere jew. separat).

Sei $a > 1$, $k_n := \lceil a^n \rceil$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}(X_i - \mu_i)\right| > a^{-n/4}\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} a^{n/2}\, \mathrm{Var}\left[\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}(X_i-\mu_i)\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{a^{n/2}\frac{1}{k_n^{\cancel{2}}}}^{\leq a^{-n/4}} \cdot \cancel{k_n} \cdot c < \infty$$

mit Borel-Cantelli:
$$\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n}(X_i-\mu_i) = \frac{S_{k_n}}{k_n} - \underbrace{\sum_{i=1}^{k_n}\frac{\mu_i}{k_n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}\mu} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$$

Sei $m \in \mathbb{N}$, dazu n mit $k_n \leq m < k_{n+1}$:

$$\frac{1}{a}\mu \xleftarrow[n\to\infty]{f.s.} \frac{S_{k_n}}{k_{n+1}} \leq \frac{S_m}{m} \leq \frac{S_{k_{n+1}}}{k_n}\cdot\frac{a}{a} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} a\cdot\mu$$

∎

Satz 4.6 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)**.** $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ *seien identisch verteilt und paarweise unabhängig, dann gilt*

$$\frac{1}{n}\Big(X_1 + \dots + X_n\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu := \mathbb{E}[X_1] \quad \textit{fast sicher.} \tag{4.1}$$

Lemma 4.7. $X_1, X_2, \dots$ *wie in Satz 4.6 ($X_i \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ identisch verteilt und paarweise unabhängig),* $Y_n := X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \le n\}}$, $T_n := Y_1 + \dots + Y_n$. *Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} \le \mathbb{E}\big[|X_1|\big] + 1 \checkmark$$

und $\frac{1}{n} T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu$ *f.s. impliziert* (4.1). $\leftarrow$ d.h. $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[\text{f.s.}]{} \mu$ mit $S_n = X_1 + \dots + X_n$

Bew.:

Beob.: $(x>0)$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \mathbb{1}_{\{x \le n\}} = \frac{x^2}{(\lceil x \rceil)^2} + \sum_{n=\lceil x \rceil + 1}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{n^2} \le 1 + x^2 \int_{\lceil x \rceil}^{\infty} \frac{1}{y^2}\, dy \le 1 + x.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{|X_1|^2}{n^2} \mathbb{1}_{\{|X_1| \le n\}}\Big] \le \mathbb{E}[1 + |X_1|].$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n \ne Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_1| > n) \le \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$$

mit Borel-Cantelli: Es gibt ein N_0 ($N_0 < \infty$ f.s.), so dass $X_n = Y_n$ für alle $n > N_0$.

Somit $\left| \frac{T_n - S_n}{n} \right| \le \frac{1}{n} \max_{j \le N_0} |X_j| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ f.s. $\lrcorner$

$X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ identisch verteilt, paarw. u.a., $Y_n := X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \le n\}}$, $T_n := Y_1 + \dots + Y_n$.

Beweis von Satz 4.6.

Sei (wieder) o.E. $X_i \geq 0$ (sonst betr. $X_i = X_i^+ - X_i^-$ jew. separat).

Wähle $a > 1$, $k_n = \lceil a^n \rceil$. (N.B. $k_n \geq m \iff n \geq \lceil \frac{\log(m)}{\log(a)} \rceil$) ($a^n \gtrsim$)

Fixiere $\delta > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|T_{k_n} - \mathbb{E}[T_{k_n}]| > \delta k_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2 k_n^2} \sum_{m=1}^{k_n} \mathrm{Var}[Y_m]$$

$$= \frac{1}{\delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Var}[Y_m] \underbrace{\sum_{n: k_n \geq m} \frac{1}{k_n^2}} \leq C(\delta,a) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}[Y_m]}{m^2}$$

$$\leq C(\delta,a) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_m^2]}{m^2} \underset{\text{Lemma 4.7}}{<} \infty \qquad \leq \sum_{n=\lceil \log(m)/\log(a) \rceil} a^{-2n} \leq \frac{4a^2}{1-a^{-2}} \cdot m^{-2}$$

also (Borel-Cantelli):

$\left\{ \left| \frac{T_{k_n} - \mathbb{E}[T_{k_n}]}{k_n} \right| > \delta \right\}$ treten nur endl. oft ein

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k_n}\left(T_{k_n} - \mathbb{E}[T_{k_n}]\right) \xrightarrow[n \to \infty]{f.s.} 0$$

$X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ identisch verteilt, paarw. u.a., $Y_n := X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \le n\}}$, $T_n := Y_1 + \dots + Y_n$.

Beweis von Satz 4.6.

weiter
$$\frac{1}{k_n} \mathbb{E}[T_{k_n}] = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[\overbrace{X_i \mathbb{1}_{\{|X_i| \le i\}}}^{= Y_i}]$$
$$= \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}[\underbrace{X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \le i\}}}_{\xrightarrow[i \to \infty]{} X_1}]$$
glm. beschr. durch $|X_1|$
$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E}[X_1] = \mu$$

(sei $(a_i) \subset \mathbb{R}$ mit $a_i \to a \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \xrightarrow[k \to \infty]{} a$)

also
$$\frac{T_{k_n}}{k_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu \quad f.s.$$

Wie im Bew. von Prop. 4.5 folgt daraus
$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu \quad f.s.,$$
mit Lemma 4.7 folgt Beh. $\blacksquare$

4.1 Fluktuationen von Summen unabhängiger Zufallsvariablen

Satz 4.8 (Kolmogorov-Ungleichungen)**.** $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ *unabhängig,* $\mathbb{E}[X_n] = 0$*,* $S_n = X_1 + \dots + X_n$*. Es gilt für* $x > 0$

$$\mathbb{P}\Big(\max\{S_k : 1 \le k \le n\} \ge x \Big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2 + \mathrm{Var}[S_n]} \tag{4.2}$$

$$\mathbb{P}\Big(\max\{|S_k| : 1 \le k \le n\} \ge x \Big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2} \tag{4.3}$$

Korollar 4.9. $X_1, X_2, \ldots$ *u.a. mit* $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $c := \sup_n \mathrm{Var}[X_n] < \infty$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, *dann gilt für* $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}(\log n)^{1/2+\varepsilon}} = 0 \quad \textit{f.s.}$$

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Stochastik I

im Sommersemester 2021

Abgabeaufgabe 15 $(8 + 4 = 12$ Punkte$)$

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$.

(a) Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{X}$ ist genau dann gleichgradig integrierbar, wenn $\mathcal{X}$ $\mathcal{L}^1$-beschränkt ist und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[1_A |X|] < \varepsilon \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} \text{ mit } \mathbb{P}(A) < \delta.$$

(ii) Ist $\mathcal{X}$ gleichgradig integrierbar, dann auch der Abschluss

$$\overline{\mathcal{X}} := \{Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}) \mid \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, X \in \mathcal{X} : \mathbb{E}[|Y - X|] < \varepsilon\}.$$

(b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

(i) Ist $\mathcal{X}$ $\mathcal{L}^1$-beschränkt, so ist $\mathcal{X}$ gleichgradig integrierbar.

(ii) Ist $\mathcal{X}$ $\mathcal{L}^p$-beschränkt für ein $p > 1$, so ist $\mathcal{X}$ gleichgradig integrierbar.

(iii) Ist $\mathcal{X}$ gleichgradig integrierbar, so ist $\mathcal{X}$ $\mathcal{L}^1$-beschränkt.

(iv) Ist $\mathcal{X}$ gleichgradig integrierbar, so ist $\mathcal{X}$ $\mathcal{L}^p$-beschränkt für ein $p > 1$.

(v) Ist $\mathcal{X}$ gleichgradig integrierbar, dann auch $\operatorname{span}\mathcal{X} := \{\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k \mid n \in \mathbb{N}, X_k \in \mathcal{X}, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$.

(vi) Sind $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ gleichgradig integrierbar, dann auch $\mathcal{X} + \mathcal{Y} := \{X + Y \mid X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}\}$.

Abgabeaufgabe 16 $(0 + 3 + 6 + 3 = 12$ Punkte$)$

Seien $E_0 = \{o\}$, $E_n = \{0,1\}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Wir interpretieren E als die Menge aller endlichen, gerichteten, im Ursprung beginnenden Pfade im unendlichen Binärbaum. Für jedes $x \in E$ existiert genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $x = (o, x_1, \ldots, x_n) \in E_n$ und wir definieren $|x| = n$ sowie $x|i = (o, x_1, \ldots, x_i) \in E_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$. Für $x, y \in E$ schreiben wir $i(x,y) = \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid x|i = y|i\}$, dann ist $x \wedge y = (o, x_1, \ldots, x_{i(x,y)}) \in E_{i(x,y)}$ das gemeinsame Anfangsstück der Pfade x und y.

(a) Machen Sie sich klar, dass

$$\#\{y \in E_n \mid |x \wedge y| = k\} = 2^{n-k-1} \vee 1 \quad \text{für alle } k \in \{0, \ldots, n\},\ x \in E_n \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Seien $(Z_x)_{x \in E}$ eine unabhängige Familie nach $\mathcal{N}(0,1)$ verteilter Zufallsvariablen, $\beta > 0$ und

$$M_x = \exp\left(\beta Z_x - \frac{1}{2}\beta^2\right) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Wir definieren

$$X_n = 2^{-n} \sum_{x \in E_n} \prod_{i=1}^n M_{x|i} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[M_x] = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[M_x^2] = \exp\left(\beta^2\right) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Hinweis: Berechnen Sie $\mathbb{E}[\exp(\alpha Z)]$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{L}(Z) = \mathcal{N}(0,1)$.

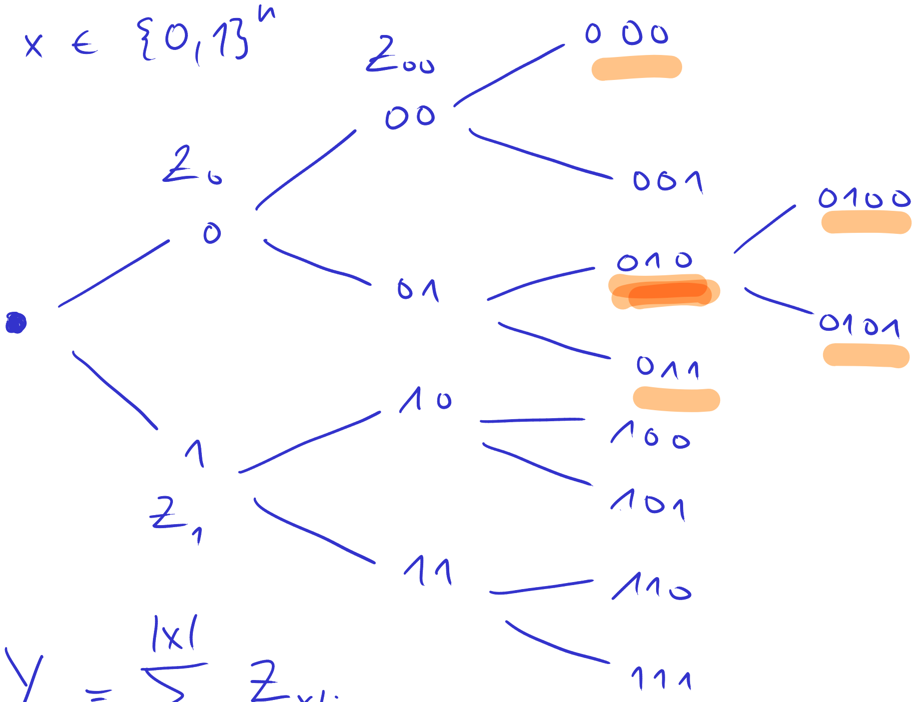
(c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X_n^2] = 2^{-n} \sum_{x \in E_n} \exp\left(\beta^2 |x \wedge o^n|\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $o^n := (o, 0, \ldots, 0) \in E_n$.

(d) Folgern Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $\beta < \sqrt{\log 2}$ gleichgradig integrierbar ist.

$x \in \{0,1\}^n$

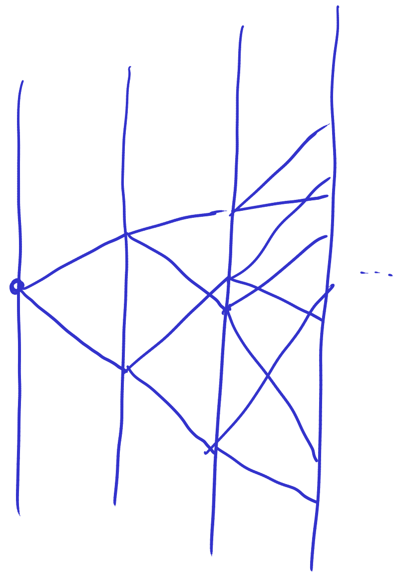


$Y_{0100} = Y_{010} + Z_{0100}$

$$Y_x = \sum_{i=1}^{|x|} Z_{x|_i}$$

Z_x u.i.v. $\sim \mathcal{N}_{0,1}$

Verzweigende Irrfahrt.



Gen. n:
2^n Part.