7.3 Gleichgradig integrierbare Martingale und optionales Stoppen

Satz 7.23. *Sei $(X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Supermartingal. Dann existiert $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ mit $X_n \to X_\infty$ f.s. und in $\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Es gilt*

$$\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathscr{F}_n] \leq X_n \text{ f.s. für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(Analog gilt $\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathscr{F}_n] \geq X_n$, falls $(X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal, und $\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathscr{F}_n] = X_n$, falls $(X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.)

(Bem. 3.32)

Bew.: Existenz von $X_\infty \in \mathcal{L}^1$ und $X_n \xrightarrow{f.s.} X_\infty$ folgt aus Satz 7.21

(denn $\sup_n \mathbb{E}[X_n^-] \leq \sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$)

Erinnerung: $(X_n)_n$ glgr. intbar $\Longleftrightarrow$

$\lim_{K\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq K\}}] = 0$,

dann impliziert $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$ auch $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X_\infty$

Mit gleichgradiger Integrierbarkeit:

$\mathbb{E}[|X_\infty - X_n|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Sei $m \leq n$:

$\mathbb{E}\big[|\mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_m] - \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_m]|\big] = \mathbb{E}\big[|\mathbb{E}[X_\infty - X_n | \mathcal{F}_m]|\big]$

$\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X_\infty - X_n| | \mathcal{F}_m]] = \mathbb{E}[|X_\infty - X_n|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

7.3 Gleichgradig integrierbare Martingale und optionales Stoppen

Satz 7.23. *Sei* $(X_n)_n$ *ein gleichgradig integrierbares Supermartingal. Dann existiert* $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ *mit* $X_n \to X_\infty$ *f.s. und in* $\mathcal{L}^1(\mathbb{P})$*. Es gilt*

$$\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathscr{F}_n] \leq X_n \text{ f.s. für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(Analog gilt $\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathscr{F}_n] \geq X_n$*, falls* $(X_n)_n$ *ein gleichgradig integrierbares Submartingal, und* $\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathscr{F}_n] = X_n$*, falls* $(X_n)_n$ *ein gleichgradig integrierbares Martingal.)*

Sei $m \leq n$:

$$\mathbb{E}\big[|\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_m]-\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m]|\big] = \mathbb{E}\big[|\mathbb{E}[X_\infty-X_n|\mathcal{F}_m]|\big] \leq \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[|X_\infty-X_n|\,|\mathcal{F}_m]\big] = \mathbb{E}[|X_\infty-X_n|] \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\underbrace{\mathbb{E}\big[(\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_m]-X_m)^+\big]}_{=0} \leq \overbrace{\mathbb{E}\big[(\mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_m]-\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m])^+\big]}^{\xrightarrow{n\to\infty}0}$$

$$+ \underbrace{\mathbb{E}\big[(\underbrace{\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m]}_{\leq X_m \text{ (für } n\geq m)}-X_m)^+\big]}_{=0}$$

Satz 7.24. *Sei $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $(\mathscr{F}_n)_n$ eine Filtration. Sei $\mathscr{F}_\infty := \sigma(\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$ und $X_n := \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_n]$. Dann ist $(X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Martingal und es gilt*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_\infty := \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_\infty] \text{ f.s. und in } \mathcal{L}^1(\mathbb{P}).$$

Lemma 7.25. *$Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}$ σ-Algebren, dann ist $(\mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.* ✓

Bew.: Es gibt $h: [0,\infty) \to [0,\infty)$, monoton wachsend, konvex, superlinear (d.h. $\frac{h(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$) mit $\mathbb{E}[h(|Y|)] < \infty$

(vgl. Satz 3.33, $\{Y\}$ ist gleichgr. int.bar)

$\mathbb{R} \ni x \mapsto h(|x|)$ ist konvex

$$\mathbb{E}\Big[\underbrace{h(|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]|)}_{\text{Jensen-Ungl. f.d. bed. Erw.} \to \leq \mathbb{E}[h(|Y|)|\mathcal{F}_n]}\Big] \leq \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[h(|Y|)|\mathcal{F}_n]\big] = \mathbb{E}[h(|Y|)] < \infty$$

$$\Rightarrow \sup_n \mathbb{E}\big[h(|\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]|)\big] < \infty$$

$\dashv$

Satz 7.24. *Sei $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $(\mathscr{F}_n)_n$ eine Filtration. Sei $\mathscr{F}_\infty := \sigma(\mathscr{F}_n, n \in \mathbb{N})$ und $X_n := \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_n]$. Dann ist $(X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ✓ und es gilt*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_\infty := \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_\infty] \text{ f.s. und in } \mathcal{L}^1(\mathbb{P}).$$

allg.: $Y = Y^+ - Y^-$ ⌋

also: $\mu_1 = \mu_2$ auf $\bigcup_{m=1}^\infty \mathcal{F}_m$ ist $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{F}_\infty$

$\mu_1 = \mu_2 \Longleftarrow$

Lemma 7.25. *$Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}$ σ-Algebren, dann ist $(\mathbb{E}[Y \mid \mathscr{F}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.*

Bew. v. Satz 7.24: $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_{n+1}] \mid \mathcal{F}_n] \overset{\text{Turmeigenschaft}}{=} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_n] = X_n$,

d.h. $(X_n)_n$ ist Martingal, ist glgr. intbar. nach obigem Lemma.

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_\infty$ f.s. und in $\mathcal{L}^1$ (z.B. wähle $X_\infty := \limsup_n X_n$),

X_∞ ist $\mathcal{F}_\infty$-m.b.

zeige: $X_\infty = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}_\infty]$. ✓

Betr. den Fall $Y \geq 0$. z.z. $\mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_A] \overset{!}{=} \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A]$ $\forall A \in \mathcal{F}_\infty$

(dann auch $X_\infty \geq 0$ f.s.)

Definiere

$\mu_1(A) := \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_A]$, $A \in \mathcal{F}_\infty$

$\mu_2(A) := \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A]$,

dies sind endliche Maße auf $\mathcal{F}_\infty$

$A \in \mathcal{F}_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$:

$\mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A]$

Bemerkung 7.26. Für ein gleichgradig integrierbares Martingal $(X_n)_n$ gilt

$$\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathscr{F}_n] = X_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Solche Martingale heißen *Doob'sche Martingale*.

Lemma 7.27. *Sei $(X_n)_n$ ein Supermartingal und T eine Stoppzeit mit $T \le m$ f.s. für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $X_T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und es gilt $\mathbb{E}[X_m \mid \mathscr{F}_T] \le X_T$ f.s. Im Falle eines Martingals gilt Gleichheit.*

Bew.: $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Supermartingal (Lemma 7.18),

$X_T = X_{T\wedge m}$ somit $X_T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, X_T ist $\mathcal{F}_T$-messbar.

Sei $A \in \mathcal{F}_T$:

$$\mathbb{E}[X_m \mathbb{1}_A] = \sum_{n=0}^{m} \overbrace{\mathbb{E}[X_m \mathbb{1}_{\underbrace{A\cap\{T=n\}}_{\in \mathcal{F}_n \text{ (denn } A\in\mathcal{F}_T)}}]}^{\le \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{A\cap\{T=n\}}]} \le \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{m} X_n \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T=n\}}\Big] = \mathbb{E}[X_T \cdot \mathbb{1}_A]$$

d.h. $\mathbb{E}[X_m - X_T \mid \mathcal{F}_T] \le 0$ ◻

Lemma 7.28. *Ist $(X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Martingal, so ist*

$$\{X_T \mid T \text{ Stoppzeit}\} \text{ gleichgradig integrierbar.}$$

Bew.: Es gibt $h: [0,\infty) \to [0,\infty)$, mon. wachsend, konvex, $\frac{h(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}[h(|X_n|)] =: M < \infty$

Sei T eine Stoppzeit, $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[h(|X_T|)\mathbb{1}_{\{T\le n\}}] = \mathbb{E}[h(|\underbrace{X_{T\wedge n}}_{=\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_{T\wedge n}]}|)\mathbb{1}_{\{T\le n\}}]$$

Jensen

$$\le \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[h(|X_n|) \mid \mathcal{F}_{T\wedge n}]\mathbb{1}_{\{T\le n\}}\Big]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[h(|X_n|)\cdot\mathbb{1}_{\{T\le n\}} \mid \mathcal{F}_{T\wedge n}]] = \mathbb{E}[h(|X_n|)\underbrace{\,}_{\mathbb{1}_{\{T\le n\}}}] \le M$$

mit $n\to\infty$: $\mathbb{E}[h(|X_T|)\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] \le M$

weiter ist

$\mathbb{E}[h(|X_\infty|)] \le M$, somit $\sup\{\mathbb{E}[h(|X_T|)] : T \text{ Stoppz.}\} \le 2\cdot M$

Satz 7.29 (optional-sampling-Theorem). *Sei $(X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Martingal, $X_\infty := \lim X_n$ und T eine Stoppzeit. Dann ist $X_T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und es gilt*

$$\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathscr{F}_T] = X_T \quad f.s.$$

Insbesondere gilt $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0]$. Ist S eine Stoppzeit mit $S \le T$, so gilt

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathscr{F}_S] = X_S \quad f.s.$$

Bew.:

$X_m = \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_m]$ (f.s) nach Satz 7.24, $\mathbb{E}[X_m \mid \mathcal{F}_{T\wedge m}] \overset{\text{Lemma 7.27}}{=} X_{T\wedge m}$ f.s.

$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_{T\wedge m}] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_m]}_{= X_m} \mid \mathcal{F}_{T\wedge m}] = X_{T\wedge m}$ f.s.

Sei $A \in \mathcal{F}_T$. $A \cap \{T \le m\} \in \mathcal{F}_{T\wedge m}$, denn: $n \in \mathbb{N}_0$
$(A \cap \{T \le m\}) \cap \{T\wedge m \le n\}$
$= A \cap \{T \le m\wedge n\} \in \mathcal{F}_{n\wedge m}$ ($\subseteq \mathcal{F}_n$)

$\mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_{A\cap\{T\le m\}}]$
$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_{A\cap\{T\le m\}} \mid \mathcal{F}_{T\wedge m}]] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_{T\wedge m}]}_{= X_{T\wedge m}} \cdot \mathbb{1}_{A\cap\{T\le m\}}]$
$= \mathbb{E}[X_T \cdot \mathbb{1}_{A\cap\{T\le m\}}]$

Satz 7.29 (optional-sampling-Theorem)**.** *Sei $(X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Martingal, $X_\infty := \lim X_n$ und T eine Stoppzeit. Dann ist $X_T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und es gilt*

$$\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathscr{F}_T] = X_T \quad f.s.$$

Insbesondere gilt $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0]$. Ist S eine Stoppzeit mit $S \leq T$, so gilt

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathscr{F}_S] = X_S \quad f.s.$$

Für $A \in \mathcal{F}_T$ ist (für jedes $m \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_{A \cap \{T \leq m\}}] = \mathbb{E}[X_T \cdot \mathbb{1}_{A \cap \{T \leq m\}}]$$

mit $m \to \infty$:

$$\mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_{A \cap \{T < \infty\}}] = \mathbb{E}[X_T \cdot \mathbb{1}_{A \cap \{T < \infty\}}]$$

(mit dom. Konv. bzw. glgr. Int.b.keit)

zudem: $\mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_{A \cap \{T = \infty\}}] = \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_{A \cap \{T = \infty\}}]$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_T \cdot \mathbb{1}_A]$$

(und: X_T ist $\mathcal{F}_T$-m.b.)

Satz 7.29 (optional-sampling-Theorem)**.** *Sei $(X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Martingal, $X_\infty := \lim X_n$ und T eine Stoppzeit. Dann ist $X_T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und es gilt*

$$\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathscr{F}_T] = X_T \quad f.s.$$

Insbesondere gilt $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0]$. Ist S eine Stoppzeit mit $S \le T$, so gilt

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathscr{F}_S] = X_S \quad f.s. \checkmark$$

Seien $S \leq T$ Stoppzeiten,

dann gilt $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$,

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_T] \mid \mathcal{F}_S]$$

$$\underset{\text{Turmeig}}{=} \mathbb{E}[X_\infty \mid \mathcal{F}_S] = X_S \quad f.s.$$

$\lrcorner$

Bemerkung und Definition 7.30. Sei $(X_n)_n$ ein adaptierter Prozess mit $X_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $X_n = M_n + A_n$ mit

$$M_0 := X_0, \quad M_n := X_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - \mathbb{E}[X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}]\big),$$

$$A_0 := 0, \quad A_n := \sum_{k=1}^{n} \big(\mathbb{E}[X_k \mid \mathscr{F}_{k-1}] - X_{k-1}\big).$$

wobei $(M_n)_n$ ein Martingal und $(A_n)_n$ previsibel ist. Die Darstellung $X = M + A$ als Summe eines Martingals M und eines previsiblen Prozesses A mit $A_0 = 0$ heißt *Doob-Zerlegung*, sie ist f.s. eindeutig.

$(X_n)_n$ ist genau dann ein Super- bzw. Submartingal, wenn $(A_n)_n$ nicht-wachsend bzw. nicht-fallend ist.

Zur Eindeutigkeit: $X = M + A = M' + A'$ (mit M, M' Martingale, A, A' previsibel $A_0 = A_0' = 0$)

$\Rightarrow \tilde{M}_n := M_n - M_n' = A_n' - A_n$,

d.h. $\tilde{M} = (\tilde{M}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist Martingal und previsibel (mit $\tilde{M}_0 = 0$)

$\tilde{M}_{n-1} = \mathbb{E}[\tilde{M}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \tilde{M}_n \Rightarrow \tilde{M}_n = \tilde{M}_{n-1} = \dots = \tilde{M}_1 = \tilde{M}_0 = 0$ f.s.

Satz 7.31. *Sei $(X_n)_n$ ein gleichgradig integrierbares Supermartingal und seien S, T Stoppzeiten mit $S \leq T$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathscr{F}_S] \leq X_S \quad f.s. \checkmark$$

Bew.: Sei $X = M + A$ die Doob-Zerlegung

Dann gilt $0 \geq A_n \geq A_{n+1} \geq \dots \searrow A_\infty \leq 0$.

$$\mathbb{E}[|A_n|] = \mathbb{E}[-A_n] = \mathbb{E}[M_n - X_n] = \mathbb{E}[M_n - M_0 + X_0 - X_n]$$
$$= \mathbb{E}[X_0 - X_n] \leq \mathbb{E}[|X_0|] + \mathbb{E}[|X_n|]$$

$\Rightarrow \sup_n \mathbb{E}[|A_n|] < \infty$

$\Rightarrow \mathbb{E}[|A_\infty|] < \infty \Rightarrow (A_n)_n$ ist gleichgradig integrierbar

$\left(\mathbb{E}[|A_n| \mathbb{1}_{\{|A_n| \geq k\}}] \leq \mathbb{E}[|A_\infty| \mathbb{1}_{\{|A_n| \geq k\}}] \right)$

$\Rightarrow (M_n)_n = (X_n - A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbares Martingal.

$$\mathbb{E}[X_T \mid \mathcal{F}_S] = \underbrace{\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S]}_{= M_S} + \mathbb{E}[A_T \mid \mathcal{F}_S] \leq M_S + \underbrace{\mathbb{E}[A_S \mid \mathcal{F}_S]}_{= A_S} = X_S$$

$\blacksquare$