Satz 5.2. *Seien* $(S_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ *σ-endliche Maßräume,* $S = S_1 \times S_2$, $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$. *Es gibt genau ein Maß* μ *(geschrieben* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$*) auf* $(S, \mathscr{A})$ *mit*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \quad A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_1. \tag{5.2}$$

Zur Eindeutigkeit: $\{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathscr{A}_i\}$ sind $\cap$-stabiler Erzeuger ✓

μ *heißt das* Produktmaß *von* μ_1 *und* μ_2*;* μ *ist σ-endlich.*

Für $f \geq 0$ $\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$*-messbar oder* $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ *gilt*

$$\begin{aligned}\int_S f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{S_2} \left(\int_{S_1} f(x_1, x_2) \, \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2) \\ &= \int_{S_1} \left(\int_{S_2} f(x_1, x_2) \, \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1)\end{aligned} \tag{5.3}$$

Zur Existenz von μ:

Für $A \in \mathscr{A}$ setze $\mu(A) := \int_{S_2} \int_{S_1} \mathbb{1}_A(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \mu_2(dx_2)$

(ist wohldef. mit Lemma 5.1)

μ ist Maß:

$\mu(\emptyset) = 0$ ✓ Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ paarw. disj., $A := \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n$

$\mu(A) = \int_{S_2} \int_{S_1} \mathbb{1}_A(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \mu_2(dx_2) = \int_{S_2} \int_{S_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) \mu_2(dx_2)$

(2x monotone Konv.)

$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ ✓

Satz 5.2. *Seien* $(S_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ σ*-endliche Maßräume,* $S = S_1 \times S_2$, $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$.
Es gibt genau ein Maß μ *(geschrieben* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$*) auf* $(S, \mathscr{A})$ *mit*

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2), \quad A_1 \in \mathscr{A}_1, A_2 \in \mathscr{A}_1. \tag{5.2}$$

μ *heißt das* Produktmaß *von* μ_1 *und* μ_2*;* μ *ist* σ*-endlich.*
Für $f \geq 0$ $\mathscr{A}$*-*$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$*-messbar oder* $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1 \otimes \mu_2)$ *gilt*

$$\int_S f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{S_2} \left(\int_{S_1} \overbrace{f}^{f^+ - f^-}(x_1, x_2) \, \mu_1(dx_1) \right) \mu_2(dx_2)$$

zur σ-Endlichkeit von μ:

$$= \int_{S_1} \left(\int_{S_2} f(x_1, x_2) \, \mu_2(dx_2) \right) \mu_1(dx_1) \tag{5.3}$$

$B_n \subset S_1$, $B_n \subset B_{n+1} \nearrow S_1$ mit $\mu_1(B_n) < \infty$ $\forall n$,

$C_n \subset S_2$, $C_n \subset C_{n+1} \nearrow S_2$ mit $\mu_2(C_n) < \infty$ $\forall n$,

$\mu(B_n \times C_n) < \infty$ $\forall n$, $B_n \times C_n \underset{n \to \infty}{\nearrow} S_1 \times S_2$.

$$\mathcal{M} := \Big\{ f \geq 0 : f\ \mathcal{A}\text{-m.b.},\ \int f\,d\mu = \int_{S_1}\int_{S_2} f\,d\mu_2\,d\mu_1 = \int_{S_2}\int_{S_1} f\,d\mu_1\,d\mu_2 \Big\}$$

$\supset$ $f = \mathbb{1}_{A_1 \times A_2}$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$

(denn $\text{l.S.} = \mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\cdot\mu_2(A_2)$,

$\overset{\shortparallel}{\text{r.S.}} = \int_{S_1}\int_{S_2} \mathbb{1}_{A_1}(x_1)\,\mathbb{1}_{A_2}(x_2)\,\mu_2(dx_1)\,\mu_1(dx_1)$)

zeige $f = \mathbb{1}_A \in \mathcal{M}$ für $A \in \mathcal{A}$ ✓

$\tilde{\mu}(A) = \int_{S_1}\int_{S_2} \mathbb{1}_A(x_1,x_2)\,\mu_2(dx_2)\,\mu_1(dx_1)$ ist Maß,

stimmt mit μ überein auf $\{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{A}_i\}$

$\Rightarrow \mu = \tilde{\mu}$

$\mathcal{M}$ ist abgeschl. unter nicht-neg. Linearkomb. und monotoner Konv. $\underset{\text{Beob. 3.15}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{M} = \{f \geq 0 : f\ \mathcal{A}\text{-m.b.}\}$

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f = f^+ - f^-$

$C_1 := \{ x_1 \in S_1 : \int_{S_2} f^+(x_1,x_2)\mu_2(x_2) = \infty$ oder $\int_{S_2} f^-(x_1,x_2)\mu_2(dx_2) = \infty \}$

erfüllt $\mu_1(C_1) = 0$

$C_2 := \{ x_2 \in S_2 : \int_{S_1} f^+(x_1,x_2)\mu_1(dx_1) = \infty$ oder $\int_{S_1} f^-(x_1,x_2)\mu_1(dx_1) = \infty \}$

erfüllt $\mu_2(C_2) = 0$, somit gilt

für $M := C_1 \times S_2 \cup S_1 \times C_2 = (C_1^c \times C_2^c)^c$: $\mu(M) = 0$,

$(M^c = C_1^c \times C_2^c)$

daher

$$\int_S f \, d\mu = \int_S \mathbb{1}_{M^c} \underbrace{f}_{(f^+ - f^-)} \, d\mu$$

$$= \ldots = \int_{S_1} \int_{S_2} f \, d\mu_2 \, d\mu_1 = \int_{S_2} \int_{S_1} f \, d\mu_1 \, d\mu_2$$

$\lrcorner$

Satz 5.3. $(S_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ *σ-endliche Maßräume,* $S := \times_{i=1}^n S_i$, $\mathscr{A} := \bigotimes_{i=1}^n \mathscr{A}_i$.
Es gibt genau ein Maß μ auf $(S, \mathscr{A})$ mit

$$\mu(\underbrace{A_1 \times \dots \times A_n}_{=(A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n}) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i), \quad \text{für } A_i \in \mathscr{A}_i, i = 1, \dots, n.$$

μ heißt das Produktmaß *von $\mu_1, \dots, \mu_n$, geschrieben $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n = \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$.*
Falls $(S_i, \mathscr{A}_i, \mu_i) = (S_1, \mathscr{A}_1, \mu_1)$ für $i = 2, \dots, n$, so schreibt man auch $\mu = \mu_1^{\otimes n}$.

Induktiv über n.

$n = 2$ ✓

Sei $n > 2$, $\tilde{S} := S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{n-1}$, $\tilde{\mathscr{A}} = \bigotimes_{i=1}^{n-1} \mathscr{A}_i$

n. Ind. ann. ex. $\tilde{\mu} = \bigotimes_{i=1}^{n-1} \mu_i$,

$\mu := \tilde{\mu} \otimes \mu_n$ ex. nach Satz 5.2

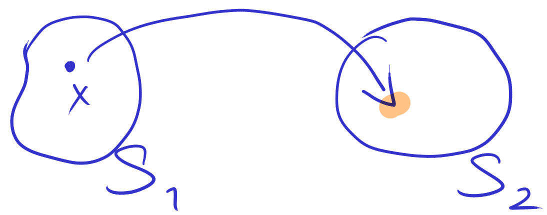
$\lrcorner$

5.1 (Übergangs-)Kerne

Definition 5.4. Seien $(S_1, \mathscr{A}_1)$ und $(S_2, \mathscr{A}_2)$ messbare Räume. $\kappa\colon S_1 \times \mathscr{A}_2 \to [0, \infty]$ *heißt (σ-)endlicher Kern von* $(S_1, \mathscr{A}_1)$ *nach* $(S_2, \mathscr{A}_2)$, falls gilt

i) Für alle $A_2 \in \mathscr{A}_2$ gilt: $S_1 \ni x \mapsto \kappa(x, A_2)$ ist ($\mathscr{A}_1 - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-)messbar.

ii) Für alle $x \in S_1$ gilt: $\kappa(x, \cdot\,)$ ist ein (σ-)endliches Maß auf $(S_2, \mathscr{A}_2)$.



κ heißt *stochastischer Kern* oder *Markov-Kern*, wenn in *ii)* gefordert wird, dass $\kappa(x, \cdot\,)$ ein W'maß ist.
κ heißt *sub-stochastisch* oder *sub-Markov*, wenn $\kappa(x, S_2) \le 1$ für alle $x \in S_1$ gilt.

$p_{x,y} \geq 0, \quad \sum_{y \in S} p_{x,y} = 1 \quad \forall x$

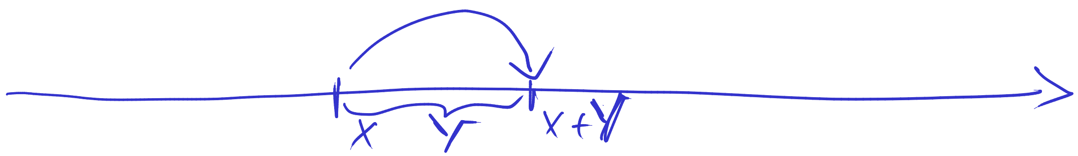
Beispiel.

i) Sei $S_1 = S_2 = S$ höchstens abzählbar, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = 2^S$ und $(p_{xy})_{x,y \in S}$ eine stochastische Matrix. Dann ist $\kappa(x, A) := \sum_{y \in A} p_{xy}$ ein stochastischer Kern von S nach S.

$\kappa(x,\cdot)$ ist W'maß, Messbarkeit ist hier automatisch erfüllt.

ii) Sei $S_1 = S_2 = \mathbb{R}$, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und ν ein W'maß auf $\mathbb{R}$. Dann ist $\kappa(x, A) := (\delta_x * \nu)(A) = \nu(A - x)$ ein stochastischer Kern.

(Interpretation: $\kappa(x, \cdot)$ beschreibt einen zufälligen Sprung gemäß ν von x aus.) Sei $Y \sim \nu$



Lemma 5.5. *κ endlicher Übergangskern von $(S_1, \mathscr{A}_1)$ nach $(S_2, \mathscr{A}_2)$, $f : S_1 \times S_2 \to [0,\infty]$ $\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar. Dann definiert*

$$I_f : S_1 \to [0,\infty], \quad I_f(x_1) = \int_{S_2} f(x_1,x_2)\,\kappa(x_1,dx_2)$$

eine $\mathscr{A}_1$(-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$)-messbare Abbildung.

(beachte $x_2 \mapsto f(x_1,x_2)$ ist m.b., Integral ist wohldefiniert)

$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : I_{\mathbb{1}_A}(\cdot)$ ist $(\mathcal{A}_1\text{-})$ messbar$\}$.

$A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{D}$ $\left(I_{\mathbb{1}_{A_1 \times A_2}}(x_1) = \mathbb{1}_{A_1}(x) \underbrace{\int \mathbb{1}_{A_2}(x_2)\,\kappa(x_1, dx_2)}_{=\kappa(x_1, A_2)} \right)$

ist ein Dynkin-System, ist m.b.

enthält alle Mengen $A_1 \times A_2$ $\Rightarrow$ $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Allg. Fall $f_n = 2^{-n}\lfloor 2^n f \rfloor \wedge n \nearrow f$

$I_{f_n}(\cdot)$ ist m.b. $\forall n$ $\Rightarrow$ I_f m.b. $\lrcorner$

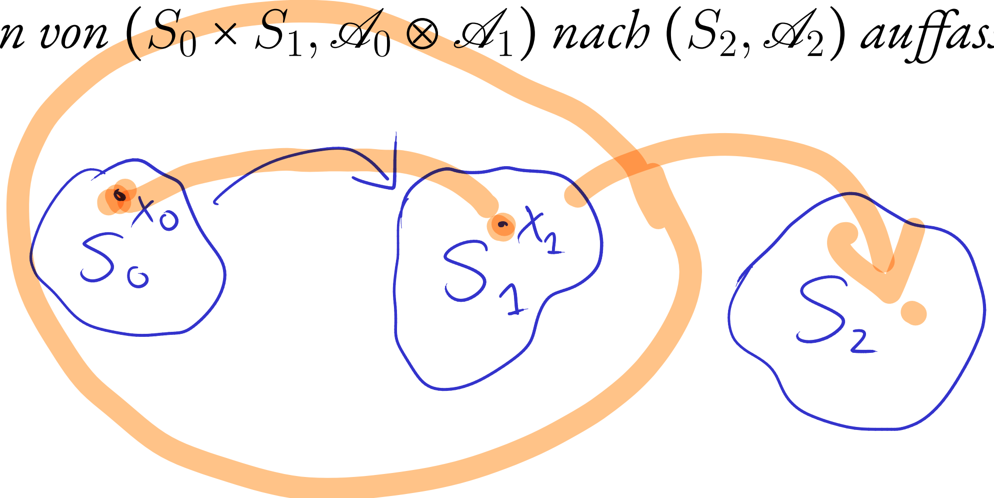
Satz und Definition 5.6 (Produkt von Kernen, „zweistufiges Experiment“). *$(S_i, \mathscr{A}_i)$, $i = 0, 1, 2$ m.b. Räume, κ_1 endlicher Kern von $(S_0, \mathscr{A}_0)$ nach $(S_1, \mathscr{A}_1)$, κ_2 endlicher Kern von $(S_0 \times S_1, \mathscr{A}_0 \otimes \mathscr{A}_1)$ nach $(S_2, \mathscr{A}_2)$. Dann ist $\kappa_1 \otimes \kappa_2 : S_0 \times \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \to [0, \infty]$,*

$$(\kappa_1 \otimes \kappa_2)\big(x_0, A\big) = \int_{S_1} \int_{S_2} \mathbf{1}_A(x_1, x_2)\, \kappa_2\big((x_0, x_1), dx_2\big)\, \kappa_1(x_0, dx_1)$$

ein σ-endlicher Kern von $(S_0, \mathscr{A}_0)$ nach $(S_1 \times S_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$, $\kappa_1 \otimes \kappa_2$ heißt das Produkt von κ_1 und κ_2.

Sind κ_1 und κ_2 (sub-)stochastisch, so auch $\kappa_1 \otimes \kappa_2$. ✓

Analog definieren wir $\kappa_1 \otimes \kappa_2$, wenn κ_2 Kern von $(S_1, \mathscr{A}_1)$ nach $(S_2, \mathscr{A}_2)$, indem wir κ_2 formal als Kern von $(S_0 \times S_1, \mathscr{A}_0 \otimes \mathscr{A}_1)$ nach $(S_2, \mathscr{A}_2)$ auffassen, der nicht von der S_0-Koordinate abhängt.



Sei $A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$

$f_A(x_0, x_1) := \int_{S_2} \mathbb{1}_A(x_1, x_2)\, \kappa_2((x_0, x_1), dx_2)$

ist m.b.,

iteriere Argument $\Rightarrow$

$\kappa_1 \otimes \kappa_2(\cdot, A)$ ist m.b.

$(\kappa_1 \otimes \kappa_2)(x_0, \cdot)$ ist Maß.

Zur σ-Endlichkeit: $A_{x_0,n} = \{x_1 \in S_1 : \kappa_2((x_0, x_1), S_2) \le n\} \nearrow_{n \to \infty} S_1$

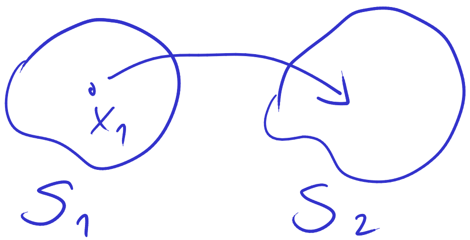
$(A_{x_0,n} \times S_2)_{n \in \mathbb{N}}$ tut's.

Korollar 5.7. $(S_1, \mathscr{A}_1, \mu)$ *Maßraum mit* $\mu(S_1) < \infty$, $(S_2, \mathscr{A}_2)$ *messbarer Raum,* κ *endlicher Kern von* S_1 *nach* S_2.

Dann gibt es ein eindeutiges σ*-endliches Maß* $\mu \otimes \kappa$ *(auf* $(S_1 \times S_2, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$*) mit*

$$\mu \otimes \kappa(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} \kappa(x_1, A_2)\, \mu(dx_1), \quad A_1 \in \mathscr{A}_1,\ A_2 \in \mathscr{A}_2$$

Ist κ *stochastisch und* μ *ein W'maß, so ist auch* $\mu \otimes \kappa$ *ein W'maß.*



Wähle „künstlich" $S_0 = \{0\}$, $\mathcal{A}_0 = 2^{S_0}$

$\kappa_1(0, A_1) := \mu(A_1)$

ist Kern von S_0 u. S_1,

dann verw. Satz 5.6.

Korollar und Definition 5.8. $n \in \mathbb{N}$, $(S_i, \mathscr{A}_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ m.b. Räume, κ_i (sub-)stochastischer Kern von $\left(\times_{j=0}^{i-1} S_j, \bigotimes_{j=0}^{i-1} \mathscr{A}_j\right)$ nach $(S_i, \mathscr{A}_i)$ (oder von $(S_{i-1}, \mathscr{A}_{i-1})$ nach $(S_i, \mathscr{A}_i)$) für $i = 1, \ldots, n$. Setze (rekursiv)

$$\bigotimes_{j=1}^{i} \kappa_i = \kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_i := \left(\kappa_1 \otimes \cdots \otimes \kappa_{i-1}\right) \otimes \kappa_i.$$

$\bigotimes_{j=1}^{i} \kappa_i$ ist substochastischer Kern von $(S_0, \mathscr{A}_0)$ nach $\left(\times_{j=1}^{i} S_j, \bigotimes_{j=1}^{i} \mathscr{A}_j\right)$ (stochastisch, falls dies für alle κ_j gilt).

Ist weiter μ endliches Maß auf $(S_0, \mathscr{A}_0)$, so ist $\mu_i := \mu \otimes \bigotimes_{j=1}^{i} \kappa_i$ endliches Maß auf $\left(\times_{j=0}^{i} S_j, \bigotimes_{j=0}^{i} \mathscr{A}_j\right)$; $\mu \otimes \bigotimes_{j=1}^{i} \kappa_i$ ist W'maß, wenn $\mu(S_0) = 1$ und alle κ_j stochastisch sind.

Wir betrachten folgende Situation:

$$(\Omega_i, \mathscr{A}_i),\ i = 0, 1, 2, \dots \quad \text{messbare Räume,}$$
$$\Omega^{(i)} := \bigtimes_{j=0}^{i} \Omega_j \ \text{ versehen mit } \ \mathscr{A}^{(i)} := \bigotimes_{j=0}^{i} \mathscr{A}_j,$$
$$\Omega := \bigtimes_{j=0}^{\infty} \Omega_j \ \text{ versehen mit } \ \mathscr{A} := \bigotimes_{j=0}^{\infty} \mathscr{A}_j.$$

Weiter sei

P_0 ein W'maß auf $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$,
κ_i stochastischer Kern von $(\Omega^{(i-1)}, \mathscr{A}^{(i-1)})$ nach $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ für $i = 0, 1, 2, \dots,$ $\quad P_i := P_0 \otimes \bigotimes_{j=1}^{i} \kappa_j$

Beobachtung. Für $i \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{A}^{(i)}$ gilt

$$P_{i+1}(A \times \Omega_{i+1}) = P_i(A)$$

$$\mathscr{C} := \left\{ A \times \Omega_{i+1} \times \Omega_{i+2} \times \cdots \, : \, i \in \mathbb{N},\ A \in \mathscr{A}^{(i)} \right\} \quad \textit{ist} \text{ eine Algebra mit } \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}$$

Satz 5.9 (Ionescu-Tulcea[1]). *Es gibt genau ein W'maß P auf $(\Omega, \mathscr{A})$, das*

$$P\Big(A \times \bigtimes_{j=k+1}^{\infty} \Omega_j\Big) = P_k(A) \quad \textit{für } A \in \mathscr{A}^{(k)},\ k \in \mathbb{N} \tag{5.4}$$

erfüllt.

[1]Cassius Ionescu-Tulcea, *1923