Definition 3.2. Für $f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ I(h) : h \in \mathcal{E}^+, h \le f \right\}$$

das Integral[1] von f bezüglich μ.
(Manchmal schreibt man auch $\mu(f) := \int f \, d\mu$ oder auch $\int f(x) \, \mu(dx)$, wenn die „Integrationsvariable“ betont werden soll.)

[1] Präziser: das Lebesgue-Integral, nach Henri Lebesgue (1875–1941)

Beobachtung 3.3 (Markov-Ungleichung[2]). Für $f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $a > 0$ gilt

f messbar ($\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$)

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f \, d\mu$$

denn: betrachte $h := a \mathbb{1}_{f^{-1}([a,\infty])}$ (≥ 0)

ist elem. Fkt., $h(x) \leq f(x) \ \forall x \in S$ ✓

$$I(h) = a \, \mu(\underbrace{f^{-1}([a,\infty])}_{= \{f \geq a\}}) \leq \int f \, d\mu$$

⌟

[2] nach Andrei Andrejewich Markov (1856–1922)

Lemma 3.4. *$f, g : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar.*

i) $f \leq g$ μ-f.ü. $\implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

ii) $f = g$ μ-f.ü. $\implies \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

iii) $f = 0$ μ-f.ü. $\iff \int f \, d\mu = 0$.

iv) $\int f \, d\mu < \infty \implies f < \infty$ μ-f.ü.

Zu i) Sei $h \in \mathcal{E}^+$ mit $h \leq f$ gegeben, $\tilde{h} := h \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} \in \mathcal{E}^+$ erfüllt $\tilde{h} \leq g$,

$$I(\tilde{h}) = \sum_{z (\neq 0)} z \, \mu(\{\tilde{h} = z\}) = \sum_z z \, \mu(\{\tilde{h} = z, \ f \leq g\})$$

$$= \sum_z z \underbrace{\mu(\{\tilde{h} = z, f \leq g\} \,\dot\cup\, \{\tilde{h} = z, f > g\})}_{= \mu(\{h = z\})} = I(h)$$

$$\implies \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$$

ii) folgt aus i)

iii) „$\Rightarrow$" ✓, „$\Leftarrow$": Sei $\int f \, d\mu = 0$

$$\xrightarrow{\text{Markov-Ungl.}} \mu(\{f \geq \tfrac{1}{n}\}) \leq \frac{1}{1/n} \int f \, d\mu = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies \mu(\{f > 0\}) \leq \sum_n \mu(\{f \geq \tfrac{1}{n}\}) = 0$$

Lemma 3.5. *f_n, $n \in \mathbb{N}$ messbar, $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \nearrow f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, so gilt*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

(Beob.: $\{f_n > h-\varepsilon\} \nearrow_{n\to\infty} \{f > h-\varepsilon\} = S$.)

Bew.: $\mathbb{N} \ni n \mapsto \int f_n\, d\mu$ ist nicht-fallend, somit gibt es

$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \le \int f\, d\mu$ (nach Lemma 3.4).

Sei $h \in \mathcal{E}^+$ mit $h \le f$, zu $\varepsilon > 0$ sei $h_n := (h-\varepsilon)^+ \mathbb{1}_{\{f_n > h-\varepsilon\}} \in \mathcal{E}^+$,

es gilt $h_n \le f_n$

$$\int f_n\, d\mu \ge I(h_n) = \sum_{\tilde z} \tilde z\, \mu(\{h_n = \tilde z\}) = \sum_z (z-\varepsilon)^+ \mu(\{h = z, f_n > h-\varepsilon\}).$$

endl. Summe, unabh. von n

Mit $n \to \infty$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \ge \sum_z (z-\varepsilon)^+ \mu(\{h = z, \cancel{f > h-\varepsilon}\}) = I((h-\varepsilon)^+)$$

mit $\varepsilon \downarrow 0$ also auch $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu \ge I(h)$

⌟

Lemma 3.5. f_n, $n \in \mathbb{N}$ *messbar*, $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \nearrow f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, *so gilt*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

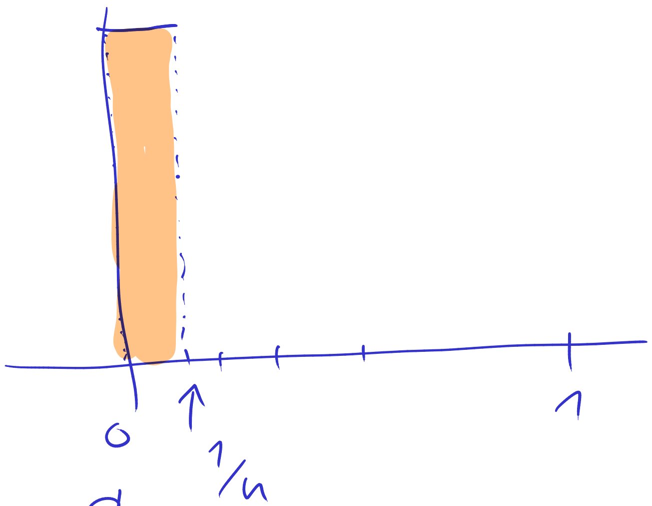
Bemerkung / „Gegenbeispiel"

Sei $(S, \mathcal{A}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{[0,1]})$

$f_n = n \mathbb{1}_{(0,1/n)}$,

dann ist

$\int f_n\, d\mu = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,



aber $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in S$.

Lemma 3.6. *Sei $f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar und $f(S)$ höchstens abzählbar, dann gilt*

$$\int f \, d\mu = \sum_{z \in f(S)} z \mu(\{f = z\}) = (*)$$

mit Lemma 3.5

(mit beliebiger Summationsreihenfolge).

Bew.: Sei $f \in \mathcal{E}^+$. Sei $h \in \mathcal{E}^+$, $h \le f$,

dann gilt für $z > y$: $\mu(\underbrace{\{f = y, h = z\}}_{= \emptyset}) = 0$,

somit $I(h) = \sum_z z \mu(\{h = z\}) = \sum_z \sum_y z \mu(\{h = z, f = y\})$

(nur $y \ge z$ „relevant")

$\le \sum_z \sum_y y \mu(\{h = z, f = y\}) = \sum_y y \mu(\{f = y\}) = I(f)$

$\Rightarrow \int f \, d\mu \le I(f)$. Insges.: $\int f \, d\mu = I(f) = (*)$.

Allg. Fall: Sei $\overbrace{y_1, y_2, \ldots}^{\ge 0}$ Aufzählung von $f(S) \cap \mathbb{R}$, $(z_n)_n \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{y_1, y_2, \ldots\}$

$f_n := \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{\{f = y_i\}} + z_n \mathbb{1}_{\{f = \infty\}} \in \mathcal{E}^+$, mit $z_n \nearrow \infty$ $f_n \nearrow f$ Beh. folgt

Lemma 3.7. *$f, g : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ m.b., $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}_+$, so gilt*

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu. \qquad (*)$$

Bew.: Betr. zun. den Fall, dass $f(S), g(S)$ abz. b.
(somit auch $(\alpha f + \beta g)(S)$ abz. b.).

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \sum_z z \, \mu(\{\alpha f + \beta g = z\})$$

$$= \sum_z \sum_{\substack{u,v: \\ \alpha u + \beta v = z}} \underbrace{z}_{=(\alpha u + \beta v)} \mu(\{f = u, g = v\}) = \sum_{u,v} (\alpha u + \beta v) \mu(\{f = u, g = v\})$$

$$= \alpha \sum_{u,v} u \, \mu(\{f = u, g = v\}) + \beta \sum_{u,v} v \cdot \mu(\{f = u, g = v\})$$

$$= \alpha \sum_u u \, \mu(\{f = u\}) + \beta \sum_v v \, \mu(\{g = v\}) = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

Allg.: $f_n := 2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor \wedge n$, $g_n := 2^{-n} \lfloor 2^n g \rfloor \wedge n$ $(\in \mathcal{E}^+)$,

$f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$. $(*)$ gilt für f_n und g_n, Beh. folgt mit Lemma 3.5 $\lrcorner$

Definition 3.8. $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar heißt *μ-integrierbar*, wenn $\int |f| \, d\mu < \infty$. Man setzt dann

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \quad (\in \mathbb{R})$$

(mit $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$)

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \{f : f \ \mu\text{-integrierbar}\}$$

Für $f \notin \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\int f^+ \, d\mu \wedge \int f^- \, d\mu < \infty$ setzt man ebenso, wobei dann die Werte $+\infty$ oder $-\infty$ vorkommen (beachte: ist wohldefiniert).

Man schreibt auch

$$\int f(x) \, \mu(dx) := \mu(f) := \int f \, d\mu,$$

abkürzend oft auch für $A \in \mathscr{A}$

$$\int_A f \, d\mu := \int f \mathbf{1}_A \, d\mu.$$

Satz 3.9. $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

i) $|f| < \infty$ μ-f.ü., $\int f\,d\mu = 0 \iff f = 0$ μ-f.ü. für $f \geq 0$ μ-f.ü.

ii) $f \leq g$ μ-f.ü. $\implies \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$, *insbesondere:* $f = g$ μ-f.ü. $\implies \int f\,d\mu = \int g\,d\mu$

iii) $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$

iv) $\int af + bg\,d\mu = a\int f\,d\mu + b\int g\,d\mu$ für $a, b \in \mathbb{R}$

Zu i): folgt aus Lemma 3.4.

ii) $f \leq g$ (f.ü.) $\iff f^+ \leq g^+$ (f.ü.) und $f^- \geq g^-$ (f.ü.),

somit $\int f\,d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \leq \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int g\,d\mu$

iii) $\left|\int f\,d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\int f^- d\mu\right|$

$= \int (f^+ + f^-)\,d\mu = \int |f|\,d\mu$

iv) Zerlege $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$, Beh. folgt mit Lemma 3.7 $\lrcorner$

Bemerkung 3.10. 1. $||f||_1 := \int |f| \, d\mu$ definiert somit eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\mu)$, definiert man $f \sim g$ $:\Leftrightarrow$ $f = g$ μ-f.ü., so ist $L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)/\sim$ ein normierter Raum.

2. Im diskreten Fall $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ (mit $\mathscr{A} = 2^S$), $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n}$ mit $a_n \geq 0$ ist

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \left\{ f : S \to \overline{\mathbb{R}} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n |f(x_n)| < \infty \right\}$$

Satz 3.11 (Monotone Konvergenz, Satz von (Beppo) Levi[3]). *$f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f_n \nearrow f$ μ-f.ü., dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

(die Gleichung ist möglicherweise als $+\infty = +\infty$ zu lesen).

Bew.: Es gibt $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N)$ und $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\nearrow} f(x)$ $\forall x \in S\setminus N$,

$(0 \le 0)$ $\tilde{f}_n := \mathbb{1}_{N^c}(f_n - f_1) \underset{n\to\infty}{\nearrow} \mathbb{1}_{N^c}(f - f_1)$

mit Lemma 3.5:

$$\underbrace{\int \tilde{f}_n \, d\mu}_{=} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int \mathbb{1}_{N^c}(f - f_1)\, d\mu = \int f - f_1 \, d\mu$$

$$\int f_n - f_1 \, d\mu = \int f_n \, d\mu - \int f_1 \, d\mu$$

[3]Beppo Levi, 1875–1961