Herzlich willkommen zur

Vorlesung Stochastik I, SS 2021

Matthias Birkner

Organisatorisches

Homepage der Vorlesung: `https://www.staff.uni-mainz.de/birkner/StochI_21/`

Übungen (betreut von Simon Holbach),
Moodle: `https://lms.uni-mainz.de/moodle/course/view.php?id=44760`

Termin: ~~Mi. 10–12 ?~~

Mi. 12 – 14

~~Di. 16 – 18~~

Hinweis: Diskussionsforum in Moodle!

Literaturhinweise

[Kl] A. Klenke, Wahrscheinlichkeitstheorie, 4. Aufl., Springer, 2020.

[Wi] D. Williams, Probability with martingales, Cambridge Univ. Press, 1995.

[Ka] O. Kallenberg, Foundations of modern probability, 2. ed, Springer, 2002.

[Ge] H.-O. Georgii, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, 5. Aufl., de Gruyter, 2015.

[KW] G. Kersting, A. Wakolbinger, Stochastische Prozesse, Springer, 2014.

[Du] R. Durrett, Probability : theory and examples, Duxbury Press, 2003.

[Fe] W. Feller, An Introduction to Probability Theory, Band 1 und Band 2, Wiley 1968 und 1971.

[Br] L. Breiman: Probability, Wiley, 1968.

[El] J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie, 5. Auflage, Springer Verlag, 2007.

[Ba] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, de Gruyter, 1978.

0.1 (Voraussichtlicher) Themenplan

1. **Grundlagen der Maßtheorie**
2. **Unabhängigkeit**
3. **Integral und Erwartungswert**
4. **Gesetz der großen Zahlen**
5. **Produktmaße und Übergangskerne**
6. **Zur bedingten Erwartung**
7. **Martingale (in diskreter Zeit)**
8. **Zum zentralen Grenzwertsatz**

Kapitel 1

Grundlagen der Maßtheorie

In diesem Kapitel geht es um grundlegende Begriffe und Sätze der Maßtheorie, insoweit sie für die Diskussion und Fundierung der Stochastik benötigt werden. Nachzulesen (und z.T. weiterführend) z.B. bei Klenke [Kl, Kapitel 1], Williams [Wi, Chapter 1], Kallenberg [Ka, Chapter 1 and 2], Durrett [Du, Appendix].

1.1 Mengensysteme, σ-Algebren

Sei Ω (nicht-leere) Menge (der „Ergebnisraum" oder „Stichprobenraum"), $2^\Omega := \{B : B \subset \Omega\}$ die Potenzmenge.

Definition 1.1. $\mathscr{A} \subset 2^\Omega$ heißt eine *σ-Algebra* (über Ω), falls gilt

$$\begin{aligned} &i) \quad \Omega \in \mathscr{A}, \\ &ii) \quad A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}, \\ &iii) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

$(A^c = \Omega \setminus A)$

Falls $\mathscr{A}$ *i), ii)* und

$$iii') \quad A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$$

erfüllt, so heißt $\mathscr{A}$ eine *Algebra*.

Beobachtung 1.2. 1. Ist $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra, so gilt auch

$$\textit{iv)}\quad \varnothing = \Omega^c \in \mathscr{A},$$

$$\textit{v)}\quad A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c \in \mathscr{A}$$

(wir verwenden die de Morgan'sche Regel: $\left(\bigcap_n A_n\right)^c = \bigcup_n A_n^c$).

2. Eine Algebra $\mathscr{A}$ erfüllt

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathscr{A} \text{ und } A_1 \cap A_2 \cup \dots \cap A_n \in \mathscr{A}$$

3. $\{\varnothing, \Omega\}$ und 2^Ω sind σ-Algebren.

4. Eine σ-Algebra ist insbesondere eine Algebra, denn

$$A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$$

Definition 1.3. Ein Paar $(\Omega, \mathscr{A})$ mit $\mathscr{A}$ σ-Algebra über Ω heißt ein *messbarer Raum* (auch: Messraum oder Ereignisraum).

$A \in \mathscr{A}$ heißt ($\mathscr{A}$-)messbare Teilmenge von Ω.

Bemerkung 1.4. Seien $\mathscr{A}_i$, $i \in I$ σ-Algebren über Ω (wobei I eine beliebige Indexmenge), so ist

$$\bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i \quad \text{ebenfalls eine } \sigma\text{-Algebra über } \Omega.$$

denn
- $\Omega \in \mathscr{A}_i \ \forall i \in I \implies \Omega \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$ ✓
- Sei $A \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i \implies A^c \in \mathscr{A}_i \ \forall i \in I \implies A^c$ ✓
- Seien $A_1, A_2, \ldots \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i \implies A_n \in \mathscr{A}_i \ \forall n \in \mathbb{N}, i \in I$

$\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}_i \ \forall i \in I$

$\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$ ✓

Definition 1.5. Für $\mathscr{C} \subset 2^\Omega$ heißt

$$\sigma(\mathscr{C}) := \bigcap \{\mathscr{A} : \mathscr{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra mit } \mathscr{C} \subset \mathscr{A} \subset 2^\Omega\},$$

die von $\mathscr{C}$ erzeugte σ-Algebra. Dies ist offenbar die kleinste σ-Algebra über Ω, die $\mathscr{C}$ umfasst.

Erinnerung 1.6 (Topologie). $\tau \subset 2^\Omega$ heißt eine Topologie (auf Ω), wenn gilt

$$\begin{aligned} &i) && \varnothing, \Omega \in \tau, \\ &ii) && A, B \in \tau \;\Rightarrow\; A \cap B \in \tau \\ &iii) && \mathcal{F} \subset \tau \text{ beliebige Teilmenge } \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \in \tau. \end{aligned}$$

$A \in \tau$ sind/heißen die offenen Teilmengen in Ω (bzgl. τ).

Wenn Ω eine Metrik d trägt (d.h. $d : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ mit $\forall\, x, y, z \in \Omega$: i) $d(x,y) = d(y,x)$, ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$, iii) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$),

so erzeugt d eine Topologie τ via

$$A \in \tau \iff \forall\, x \in A : \exists\, r > 0 : B_r(x) \subset A$$

wo $B_r(x) := \{y \in \Omega : d(x,y) < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius r ist.

Auf $\Omega = \mathbb{R}^m$ verwenden wir (meist)

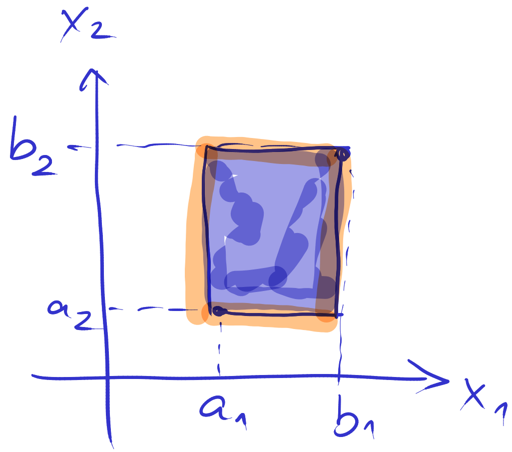
$$d(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_m),\ y = (y_1, \dots, y_m),$$

den Euklidischen Abstand.

Definition 1.7. Wenn Ω eine Topologie τ trägt, so heißt die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra $\sigma(\tau)$ die *Borel-σ-Algebra*[1], man schreibt $\mathcal{B}(\Omega) := \sigma(\tau)$.

Beispiel 1.8 (Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$)**.** Für $a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ schreibe $a \le b$ (bzw. $a < b$), wenn $a_i \le b_i$ (bzw. $a_i < b_i$) für $i = 1, 2, \dots, d$,

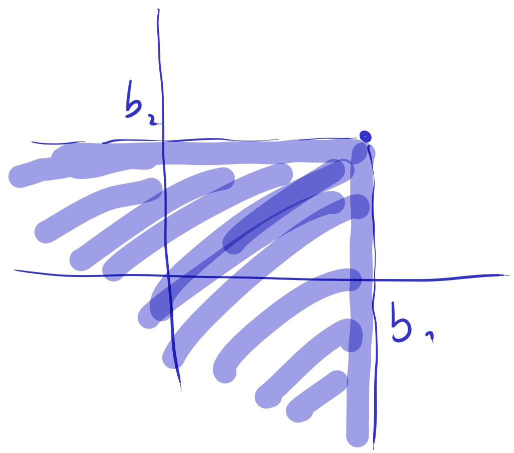
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}^d : a \le x \le b\} = \bigtimes_{i=1}^{d} [a_i, b_i]$$



analog $(a, b]$, (a, b).

Jedes der folgenden Mengensysteme erzeugt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathscr{C}_0 := \left\{B_r(x) : x \in \mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\right\}$$
$$\mathscr{C}_1 := \left\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}^d\right\}$$
$$\mathscr{C}_2 := \left\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}$$
$$\mathscr{C}_3 := \left\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}^d, a \le b\right\}$$
$$\mathscr{C}_4 := \left\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}$$



[1] nach Émile Borel, 1871–1956

Erzeugermengen von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: $\mathscr{C}_0 = \{B_r(x) : x \in \mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)\}$, $\mathscr{C}_1 = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}^d\}$, $\mathscr{C}_2 = \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\}$, $\mathscr{C}_3 = \{[a,b] : a, b \in \mathbb{R}^d, a \le b\}$, $\mathscr{C}_4 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}^d, a < b\}$

Beweis.

Zu $\mathscr{C}_0$: $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$, sei $O \in \mathcal{T}$, dann gibt es $x_n \in O \cap \mathbb{Q}^d$ und $r_n \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)$

$\Rightarrow \sigma(\mathcal{T}_0) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_{r_n}(x_n)}_{\in \mathscr{C}_0} \in \sigma(\mathscr{C}_0)$

analog für $\mathscr{C}_4$ (verwende „ℓ_∞-Kugeln",
es gibt (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$ mit $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n)$)

$(x_{n,1}, \dots, x_{n,d})$

Zu $\mathscr{C}_2$: $\underset{\in \mathscr{C}_2}{(a,b]} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + \underbrace{(\tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n})}_{d\text{-mal}}) \in \sigma(\mathscr{C}_4)$

$\mathscr{C}_4 \ni (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - (\tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n})) \in \sigma(\mathscr{C}_2)$

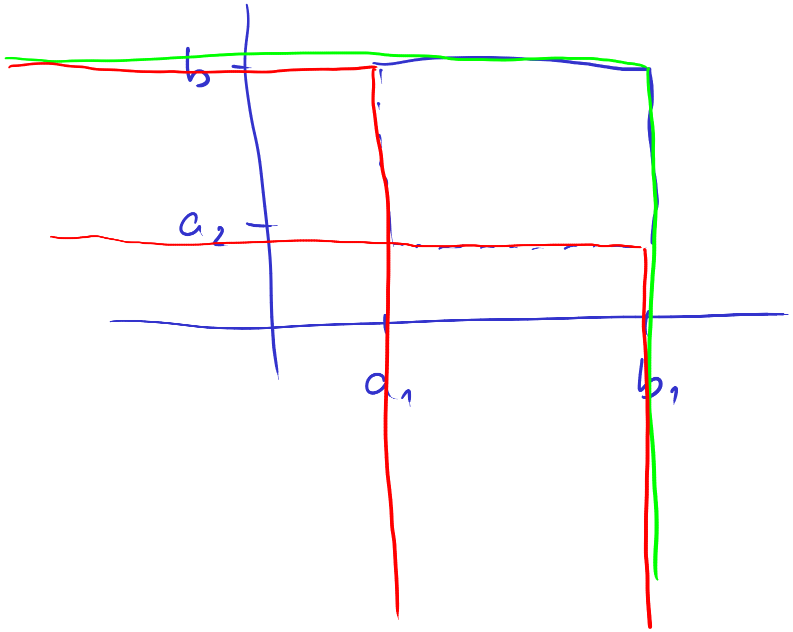
$\Rightarrow \sigma(\mathscr{C}_2) = \sigma(\mathscr{C}_4)$

analog: $\sigma(\mathscr{C}_3) = \sigma(\mathscr{C}_4)$

Erzeugermengen von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: $\mathscr{C}_0 = \left\{B_r(x) : x \in \mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)\right\}, \mathscr{C}_1 = \left\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}^d\right\},$
$\mathscr{C}_2 = \left\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}, \mathscr{C}_3 = \left\{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\right\}, \mathscr{C}_4 = \left\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}^d, a < b\right\}$

Beweis.

Zu $\mathscr{C}_1$: $(a,b] = (-\infty, b] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{d} (-\infty, c^{(i)}] \right) \in \sigma(\mathscr{C}_1)$



mit $c^{(i)} = (b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \dots, b_d)$

$(\Longrightarrow \sigma(\mathscr{C}_1) \supset \sigma(\mathscr{C}_2))$

$(-\infty, b] = \bigcup_{n > \|a\|} (-n, b]$

Somit $\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \sigma(\mathscr{C}_2)$