Kapitel 8

Zum zentralen Grenzwertsatz

8.1 Zu charakteristische Funktionen und schwacher Konvergenz

Definition 8.1. μ endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$, die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\,\mu(dx)\ \Big(:= \int_{\mathbb{R}} \cos(tx)\,\mu(dx) + i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx)\,\mu(dx) \Big)$$

(mit $i = \sqrt{-1}$ der imaginären Einheit) heißt die *charakteristische Funktion* von μ (man schreibt oft auch $\varphi = \varphi_\mu$, um die Abhängigkeit von μ zu betonen).

Für eine reellwertige ZV X (definiert auf einem W'raum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$) heißt

$$\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}\big[e^{itX}\big]$$

die *charakteristische Funktion* von X (d.h. formal $\varphi_X = \varphi_{\mathscr{L}(X)}$).

Lemma 8.2. *Sei $\varphi = \varphi_X$ die charakteristische Funktion einer reellen ZV X. Es gilt*

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

i) $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$

ii) φ *ist gleichmäßig stetig auf* $\mathbb{R}$

iii) $\varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$

iv) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$ *für* $a, b \in \mathbb{R}$

v) X *und* Y *unabbhängige reelle* ~~ZVN~~ ZVn $\Longrightarrow \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

Bew.: i) $|\mathbb{E}[e^{itX}]| \leq \mathbb{E}[\underbrace{|e^{itX}|}_{=1}] = 1 = e^{i0} = \varphi(0)$

iii) $\varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}[e^{-itX}] = \mathbb{E}[\overline{e^{itX}}] = \overline{\mathbb{E}[e^{itX}]}$

iv) $\mathbb{E}[e^{it(aX+b)}] = \mathbb{E}[\underbrace{e^{itb}} \cdot e^{itaX}] = e^{itb}\varphi_X(at)$

v) $\mathbb{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{itX} \cdot e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{itX}] \cdot \mathbb{E}[e^{itY}]$

u.a.

Lemma 8.2. *Sei $\varphi = \varphi_X$ die charakteristische Funktion einer reellen ZV X. Es gilt*

i) $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$

ii) φ *ist gleichmäßig stetig auf* $\mathbb{R}$

iii) $\varphi_{-X}(t) = \overline{\varphi_X(t)}$

iv) $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$ *für* $a, b \in \mathbb{R}$

v) X *und* Y *unabbhängige reelle ZVN* $\Longrightarrow \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

ii) Sei $\varepsilon > 0$. $\mu := \mathcal{L}(X)$, Wähle M mit $\mu([-M,M]^c) < \frac{\varepsilon}{4}$,

$\delta > 0$ so klein, dass $\sup\{|e^{iy} - 1| : y \in \mathbb{R}, |y| \leq \delta\} < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $|t_1 - t_2| < \delta/M$:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\underbrace{(e^{it_1x} - e^{it_2x})}_{= e^{it_2x}(e^{i(t_1-t_2)x} - 1)}| \mu(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |e^{i(t_1-t_2)x} - 1| \mu(dx)$$

$$\leq \int_{[-M,M]} \varepsilon/2 \, \mu(dx) + \int_{[-M,M]^c} 2 \, \mu(dx) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \lrcorner$$

Beispiel 8.3. 1. $\varphi_{\delta_0}(t) = 1$

2. $\varphi_{\mathrm{Ber}_p}(t) = pe^{it} + 1 - p$

3. $\varphi_{\mathrm{Bin}_{n,p}}(t) = \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n$

$$\lambda \int_0^\infty e^{x(it-\lambda)}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - it} \int_0^\infty e^{-(\lambda-it)x}(\lambda-it)\,dx$$

4. $\varphi_{\mathrm{Exp}_\lambda}(t) = \int_0^\infty e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \cancel{\frac{\lambda}{\lambda + it}}$ $\quad \frac{\lambda}{\lambda - it}$

5. Für $Z \sim \mathcal{N}_{0,1}$ ist $\varphi_Z(t) = \exp(-t^2/2)$

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{itx} e^{-x^2/2}}_{= e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} \cdot e^{-t^2/2}}\,dx = e^{-t^2/2}$$

Satz 8.4. *μ endliches Maß mit Verteilungsfunktion F_μ (d.h. $F_\mu(x) = \mu\big((-\infty, x]\big)$) und charakteristischer Funktion φ_μ, dann gilt für $-\infty < a < b < \infty$*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_\mu(t)\, dt = \mu\big((a,b)\big) + \frac{1}{2}\mu\big(\{a\}\big) + \frac{1}{2}\mu\big(\{b\}\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(F_\mu(b) + F_\mu(b-)\big) - \frac{1}{2}\big(F_\mu(a) + F_\mu(a-)\big) \tag{8.1}$$

Korollar 8.5. *Insbesondere gilt für endliche Maße $\mu, \tilde{\mu}$ auf $\mathbb{R}$*

$$\mu = \tilde{\mu} \iff \varphi_\mu = \varphi_{\tilde{\mu}}$$

(denn dann ist $\tilde{\mu}((a,b)) = \mu((a,b))$ wenn $a,b \in C = \{x : \mu(\{x\}) = 0$ und $\tilde{\mu}(\{x\}) = 0\}$,

$\mathbb{R} \setminus C$ ist höchstens abzählbar)

Bew. (Satz 8.4):

$$I_T := \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_\mu(t)\, dt$$

$$= \int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx}}_{= f_{a,b}(t,x) = \int_a^b e^{-ity}\, dy\, e^{itx}} \mu(dx)\, dt$$

$|f_{a,b}(\cdot,\cdot)| \le b-a$

$f_{a,b}(\cdot,\cdot)$ stetig

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{-T}^{T} \frac{e^{it(x-a)} - e^{it(x-b)}}{it} dt}_{=: \tilde f_{a,b}(T,x)} \mu(dx)$$

$$\tilde f_{a,b}(T,x) = \underbrace{\frac{1}{i} \int_{-T}^{T} \frac{\cos(t(x-a)) - \cos(t(x-b))}{t} dt}_{=0} + \int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-a))}{t} - \frac{\sin(t(x-b))}{t} dt$$

$$= 2 \int_0^T \frac{\sin(t(x-a))}{t} dt - 2 \int_0^T \frac{\sin(t(x-b))}{t} dt$$

$$\tilde f_{a,b}(T,x) = 2\int_0^T \frac{\sin(t(x-a))}{t}\,dt - 2\int_0^T \frac{\sin(t(x-b))}{t}\,dt$$

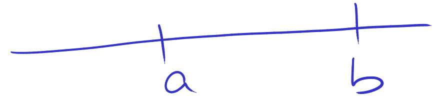
$$\mathrm{Si}(y) := \int_0^y \frac{\sin(t)}{t}\,dt,\quad y>0, \qquad \mathrm{sign}(y) = \begin{cases} 1, & y>0 \\ 0, & y=0 \\ -1, & y<0 \end{cases}$$

(„Integralsinus"), damit

$$\tilde f_{a,b}(T,x) = 2\,\mathrm{sign}(x-a)\,\mathrm{Si}(T(x-a)) - 2\,\mathrm{sign}(x-b)\,\mathrm{Si}(T(x-a)) \qquad \Big|\ \text{es gilt } \mathrm{Si}(y) \xrightarrow[y\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$\tilde f_{a,b}$ ist beschr.,

$$\tilde f_{a,b}(T,x) \xrightarrow[T\to\infty]{} \begin{cases} 0, & x<a \text{ oder } x>b \\ 2\pi, & a<x<b \\ \pi, & a=x \text{ oder } b=x \end{cases}$$



$$I_T = \int_{\mathbb{R}} \tilde f_{a,b}(T,x)\,\mu(dx) \xrightarrow[T\to\infty]{} \int 2\pi\,\mathbb{1}_{(a,b)}(x) + \pi\,\mathbb{1}_{\{a,b\}}(x)\,\mu(dx)$$

(dom. Konv.)

$\blacksquare$

Lemma 8.6. *Sei X reelle ZV mit $\mathbb{E}[X] = \mu$, $\mathbb{E}[X^2] = \theta^2 < \infty$, so ist*

$$\varphi_X(t) = 1 + it\mu - \frac{1}{2}\theta^2 t^2 + \varepsilon(t)t^2 \tag{8.2}$$

wobei

$$\left|\varepsilon(t)\right| \leq \mathbb{E}\Big[\frac{|t|}{6}|X|^3 \wedge |X|^2\Big] \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \tag{8.3}$$

Idee:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[1 + itX + \tfrac{1}{2}(itX)^2 + \ldots]$$
$$= 1 + it\mathbb{E}[X] - \tfrac{1}{2}t^2\mathbb{E}[X^2] + \ldots$$

(dann: präzise Abschätzung des Restglieds),

Siehe Notizen.