Organisatorisches

Homepage der Vorlesung: `https://www.staff.uni-mainz.de/birkner/StochI_21/`

Übungen (betreut von Simon Holbach),
Moodle: `https://lms.uni-mainz.de/moodle/course/view.php?id=44760`

Termin: ~~Mi. 10 – 12 ?~~

Mi. 10 – 12 & Mi. 12 – 14

~~Di. 16 – 18~~

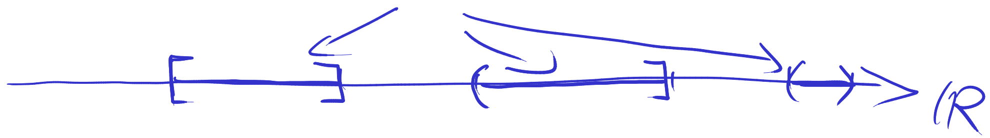
Hinweis: Diskussionsforum in Moodle!

Bemerkung. Für $\Omega = \mathbb{R}$ ist

$$\mathscr{A} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{k} I_j \;:\; k \in \mathbb{N}, I_1, \ldots, I_k \text{ paarw. disjunkte (möglicherw. halb-unendliche) Intervalle} \right\}$$

eine Algebra.

z.B. $\mathscr{C}_3 = \{[a,b] : a < b\}$



Definition 1.9. $\mathscr{C} \subset 2^{\Omega}$ heißt *schnittstabil*, wenn

$$\text{für alle } A, B \in \mathscr{C} : \; A \cap B \in \mathscr{C}$$

Beobachtung. Die Mengensysteme $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}_4$ aus Bsp. 1.8 sind $\cap$-stabil. (wenn man $\emptyset$ als Element hinzufügt)

Definition 1.10. $\Omega \neq \emptyset$. $\mathscr{D} \subset 2^{\Omega}$ heißt ein *Dynkin-System*[2] (auch: ein λ-System), wenn gilt

$$\begin{aligned} &i) \quad \Omega \in \mathscr{D}, \\ &ii) \quad A \in \mathscr{D} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathscr{D}, \\ &iii) \quad A_1, A_2, \dots \in \mathscr{D} \text{ paarweise disjunkt } \;\Rightarrow\; \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n \in \mathscr{D}. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.11.

1. $\mathscr{A}$ σ-Algebra $\Rightarrow$ $\mathscr{A}$ Dynkin-System
2. $\mathscr{D}$ Dynkin-System, so ist $\emptyset = \Omega^c \in \mathscr{D}$, für $D_1 \dots, D_n \in \mathscr{D}$ paarweise disjunkt ist $D_1 \dot\cup D_2 \dot\cup \cdots \dot\cup D_n = D_1 \dot\cup D_2 \dot\cup \cdots \cup D_n \dot\cup \emptyset \dot\cup \emptyset \dot\cup \cdots \in \mathscr{D}$.
3. $\mathscr{D}$ Dynkin-System, $D_1, D_2 \in \mathscr{D}$ mit $D_1 \subset D_2$, so ist $D_2 \setminus D_1 = (D_1 \dot\cup D_2^c)^c \in \mathscr{D}$.
4. Im Allgemeinen ist ein Dynkin-System nicht abgeschlossen unter $\cap$ (und somit keine Algebra). Betrachte z.B. Ω endlich mit $|\Omega| \in 2\mathbb{N}$, $\mathscr{D} := \{A \subset \Omega : |A| \text{ ist gerade}\}$ ist ein Dynkin-System.

[2] nach Evgenii Dynkin, 1924–2014

$\Omega = \{1, \dots, 10\}$

$\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} \notin \mathcal{D}$.

Proposition 1.12. *Ein Dynkin-System $\mathscr{D}$ ist eine σ-Algebra g.d.w. $\mathscr{D}$ $\cap$-stabil ist.*

Bew.: „$\Longrightarrow$" ✓

„$\Longleftarrow$": Sei D $\cap$-stabiles Dynkin-System, $A_1, A_2, \ldots \in D$.

Konstruiere $D_1, D_2, \ldots \in D$ paarw. disjunkt mit $\dot{\bigcup}_n D_n = \bigcup_n A_n$.

$D_1 = A_1$, $D_2 := A_2 \setminus \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{\in D} \in D$ (und $D_1 \dot{\cup} D_2 = A_1 \cup A_2$)

Seien $D_1, \ldots, D_n$ konstr. mit $\dot{\bigcup}_{j=1}^n D_j = \bigcup_{j=1}^n A_j$,

$D_{n+1} := A_{n+1} \setminus \left(\left(\dot{\bigcup}_{j=1}^n D_j \right) \cap A_{n+1} \right) \in D$ $\lrcorner$

Beobachtung und Definition 1.13. $\mathscr{D}_i$, $i \in I$ (beliebige Indexmenge) Dynkin-Systeme (über Ω), so ist $\bigcap_{i \in I} \mathscr{D}_i$ wiederum ein Dynkin-System.

Für $\mathscr{E} \subset 2^\Omega$ heißt

$$\delta(\mathscr{E}) := \bigcap \left\{ \mathscr{D} : \mathscr{D} \text{ ist Dynkin-System mit } \mathscr{E} \subset \mathscr{D} \right\}$$

das von $\mathscr{E}$ erzeugte Dynkin-System. Dies ist offenbar das kleinste Dynkin-System über Ω, das $\mathscr{E}$ umfasst.

Satz 1.14. *$\mathscr{E} \subset 2^\Omega$ $\cap$-stabil, so gilt $\delta(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$.*

(Stets gilt $\delta(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.)

Bew.: Zu zeigen: $\delta(\mathcal{E})$ ist $\cap$-stabil. ✓

Sei $B \in \delta(\mathcal{E})$, $\mathcal{D}_B := \{ A \subset \Omega : A \cap B \in \delta(\mathcal{E}) \}$.

(es würde auch genügen, $A \in \delta(\mathcal{E})$ zu fordern)

Zeige: $\mathcal{D}_B$ ist Dynkin-System: $\Omega \in \mathcal{D}_B$ ✓,

(v) sei $A \in \mathcal{D}_B$, $A^c \cap B = B \setminus (A \cap B) \in \delta(\mathcal{E})$, also $A^c \in \mathcal{D}_B$,

seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}_B$ paarw. disj. $\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B = \underbrace{\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)}_{\in \delta(\mathcal{E})}$

also $\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_B$

Zeige: $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_B$.

Betr. den Fall $B (= E) \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{E}$ $\Rightarrow$ $A \cap B \in \mathcal{E} \subset \delta(\mathcal{E})$

($\mathcal{E}$ $\cap$-stabil)

(d.h. $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_B$ falls $B \in \mathcal{E}$, insbes. $\mathcal{D}_B \supset \delta(\mathcal{E})$ in diesem Fall)

Betr. nun den Fall allg. $B \in \delta(\mathcal{E})$. Sei $E \in \mathcal{E}$,

dann ist $B \cap E \in \delta(\mathcal{E})$, d.h. $\mathcal{D}_B \supset \mathcal{E}$.

Somit: $\delta(\mathcal{E})$ ist $\cap$-stabil. ┘

Bemerkung 1.15 (Algebren, Ringe, Halbringe)**.** Die Mengenoperationen $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ („symmetrische Differenz") und $A \cap B$ erfüllen die Axiome eines kommutativen Rings im Sinne der Algebra (Δ entspricht „+", $\cap$ entspricht „$\times$", $\varnothing$ ist die additive 0, Ω ist die multiplikative 1).

Ein *Ring* $\mathscr{A}$ (im Sinne der Mengensysteme) erfüllt

$$\begin{aligned} &i) \quad \varnothing \in \mathscr{A}, \\ &ii) \quad A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}, \\ &iii) \quad A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathscr{A} \end{aligned}$$

insbesondere gilt für einen Ring $\mathscr{A}$ auch

$$A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathscr{A}$$

und $\mathscr{A}$ ist abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen.

Ein *Halbring* $\mathscr{A}$ (im Sinne der Mengensysteme) erfüllt $\varnothing \in \mathscr{A}$, für $A, B \in \mathscr{A}$ gilt $A \cap B \in \mathscr{A}$ und $A \setminus B = \dot{\bigcup}_{j=1}^{m} C_j$ für geeignete paarweise disjunkte $C_1, \dots, C_m \in \mathscr{A}$

Ein „klassisches" Beispiel eines (Mengen-)Rings über $\mathbb{R}$ ist

$$\{\text{endl. Vereinigungen von Intervallen aus } \mathbb{R}\},$$

ein „klassisches" Beispiel eines (Mengen-)Halbrings über $\mathbb{R}$ ist

$$\{\text{endl. Intervalle aus } \mathbb{R}\}.$$

1.2 Mengenfunktionen, Maße

Definition 1.16. $(\Omega, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ heißt ein *Maß* (auf $(\Omega, \mathscr{A})$), wenn gilt $\mu(\varnothing) = 0$ und

$$A_1, A_2, \dots \in \mathscr{A} \text{ paarw. disjunkt } \Rightarrow \mu\Big(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(μ ist σ-additiv).

μ heißt *endliches Maß*, wenn $\mu(\Omega) < \infty$; μ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, wenn $\mu(\Omega) = 1$; μ heißt *σ-endlich*, wenn es eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ gibt mit $\bigcup_n C_n = \Omega$ und $\mu(C_n) < \infty$ für alle n.

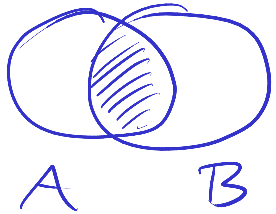
Wenn $\mathscr{A}$ (nur) eine Algebra ist: $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ mit

$$\mu\big(A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup \cdots \dot\cup A_n\big) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$$

heißt ein *Inhalt* (d.h. ein Inhalt μ ist endlich additiv); μ heißt in diesem Fall ein *Prämaß*, wenn es σ-additiv ist.

Bemerkung 1.17. Sei μ Maß

1. $A, B \in \mathscr{A}, A \subset B \;\Rightarrow\; \mu(A) \le \mu(B) \quad$ (denn $\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0}$)
2. $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \le \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n)$
3. Wenn $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt für $A, B \in \mathscr{A}$
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$
$\mu(A \cup B)$ (links: $= \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$)
4. Wenn $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt für $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}, n \in \mathbb{N}$
$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{\varnothing \neq K \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|K|-1} \mu\Big(\bigcap_{k \in K} A_k\Big)$$
(„Einschluss-Ausschluss-Regel“).



Beispiel. 1. Für beliebiges Ω und $a \in \Omega$ definiert für $A \in \mathscr{A}$

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

das *Dirac-Maß* δ_a im Punkt a.

2. Für abzählbares Ω (ausgestattet mit $\mathscr{A} = 2^\Omega$) ist

$$\mu(A) = \#A, \quad A \subset \Omega$$

das *Zählmaß*.

Satz 1.18 (Maße sind durch ihre Werte auf einem $\cap$-stabilen Erzeuger festgelegt)**.** *Seien μ_1, μ_2 Maße auf messbarem Raum $(\Omega, \mathscr{A})$, $\mathscr{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathscr{A}$, es gelte*

$$\mu_1(C) = \mu_2(C) \quad \textit{für alle } C \in \mathscr{E}$$

und es gebe $(C_n)_n \subset \mathscr{E}$ mit $C_1 \subset C_2 \subset \dots, \bigcup_n C_n = \Omega$, $\mu_1(C_n) < \infty$.
Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{A}$.

Bew.: Fixiere $E \in \mathcal{E}$ $(\mu_1(E) = \mu_2(E))$ mit $\mu_i(E) < \infty$

$$\mathcal{D}_E = \{A \in \mathcal{A} : \mu_1(E \cap A) = \mu_2(E \cap A)\},$$

dies ist ✓ ein Dynkin-System: $\Omega \in \mathcal{D}_E$ ✓, sei $A \in \mathcal{D}_E$

$$\Rightarrow \mu_1(A^c \cap E) = \mu_1(E) - \mu_1(A \cap E)$$
$$= \mu_2(E) - \mu_2(A \cap E) = \mu_2(A^c \cap E)$$
$$\Rightarrow A^c \in \mathcal{D}_E \checkmark$$

seien $A_1, A_2, \dots$ paarw. disjunkt, $A_n \in \mathcal{D}_E$ $\forall n$:

(weiter nächste Woche)

$$\mu_1\Big(E \cap \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n\Big) = \mu_1\Big(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (E \cap A_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu_1(E \cap A_n)}_{= \mu_2(E \cap A_n)}$$
$$= \dots = \mu_2\Big(E \cap \dot{\bigcup^{\infty}} A_n\Big)$$