Wir betrachten folgende Situation:

Bem.! $\mathscr{C}$ enth. $A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i \times \Omega_{i+1} \times \dots$ für $A_i \in \mathscr{A}_i$

$$(\Omega_i, \mathscr{A}_i),\ i = 0, 1, 2, \dots \quad \text{messbare Räume,}$$
$$\Omega^{(i)} := \bigtimes_{j=0}^{i} \Omega_j \ \text{ versehen mit } \ \mathscr{A}^{(i)} := \bigotimes_{j=0}^{i} \mathscr{A}_j,$$
$$\Omega := \bigtimes_{j=0}^{\infty} \Omega_j \ \text{ versehen mit } \ \mathscr{A} := \bigotimes_{j=0}^{\infty} \mathscr{A}_j.$$

Weiter sei

$\Rightarrow P_{i+1} = P_i \otimes \kappa_{i+1}$

P_0 ein W'maß auf $(\Omega_0, \mathscr{A}_0)$,
κ_i stochastischer Kern von $(\Omega^{(i-1)}, \mathscr{A}^{(i-1)})$ nach $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ für $i = 0, 1, 2, \dots,$ $\quad P_i := P_0 \otimes \bigotimes_{j=1}^{i} \kappa_j$

$\kappa_i(\underbrace{(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1})}_{\in\, \Omega^{(i-1)}}, \underbrace{A_i}_{\in\, \mathscr{A}_i})$ ist W'maß auf $(\Omega^{(i)}, \mathscr{A}^{(i)})$

Beobachtung. Für $i \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{A}^{(i)}$ gilt

$$P_{i+1}(\underbrace{A \times \Omega_{i+1}}_{\in\, \mathscr{A}^{(i+1)}}) = P_i(A) \quad \checkmark \quad (= P_{i+1}(A \times \Omega_{i+1} \times \Omega_{i+2})$$

$$\mathscr{C} := \left\{ A \times \Omega_{i+1} \times \Omega_{i+2} \times \cdots : i \in \mathbb{N},\ A \in \mathscr{A}^{(i)} \right\} \quad \textit{ist} \text{ eine Algebra mit } \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}$$

$$= P_i \otimes \kappa_{i+1}(A \times \Omega_{i+1}) = \int_{\Omega^{(i)}} \int_{\Omega_{i+1}} \mathbb{1}_{A \times \Omega_{i+1}}((\omega_0, \dots, \omega_i), \omega_{i+1})\, \kappa_{i+1}((\omega_0, \dots, \omega_i), d\omega_{i+1})\, P_i(d(\omega_0, \dots, \omega_i))$$
$$= \int_{\Omega^{(i)}} \mathbb{1}_A \, dP_i$$

Satz 5.9 (Ionescu-Tulcea[1]). *Es gibt genau ein W'maß P auf $(\Omega, \mathscr{A})$, das*

$\mathcal{C} = \{A \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \cdots : k \in \mathbb{N}, A \in \mathscr{A}^{(k)}\}$

$$(\ast) \qquad P\left(A \times \bigtimes_{j=k+1}^{\infty} \Omega_j\right) = P_k(A) \quad \textit{für } A \in \mathscr{A}^{(k)},\ k \in \mathbb{N} \tag{5.4}$$

erfüllt.

Eindeutigkeit: P und P' erfüllen $(\ast)$ $\Longrightarrow$ P und P' stimmen auf $\mathcal{C}$ überein $\underset{\text{Eind. satz f. Maße, Satz 1.18}}{\Longrightarrow}$ $P = P'$

$(\ast)$ ist konsistent: $\underbrace{A \times \Omega_{k+1}}_{\in \mathscr{A}^{(k+1)}} \bigtimes_{j=k+2}^{\infty} \Omega_j$, $P_{k+1}(A \times \Omega_{k+1}) = P_k(A)$)

Existenz:

Definiere P auf $\mathcal{C}$ via $(\ast)$, ist wohldefiniert, ist Inhalt ✓

$(B, B' \in \mathcal{C}$ mit $B' \cap B = \emptyset$

$P(B \mathbin{\dot\cup} B') \Longleftarrow$ $\underset{\shortparallel}{B} = A \times \Omega_{k+1} \times \cdots$, $B' = A \times \Omega_{k'+1} \times \Omega_{k'+2} \times \cdots$,

$= P_{\max(k,k')}(B \mathbin{\dot\cup} B')$ $\quad B, B' \in \mathscr{A}^{(\max(k,k'))}$

$= P_{\max(k,k')}(B) + P_{\max(k,k')}(B')$

[1] Cassius Ionescu-Tulcea, *1923

Satz 5.9 (Ionescu-Tulcea[1]). *Es gibt genau ein W'maß P auf $(\Omega, \mathscr{A})$, das* $\mathcal{C} = \{A \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times \dots : k \in \mathbb{N}, A \in \mathscr{A}^{(k)}\}$

$$P\left(A \times \bigtimes_{j=k+1}^{\infty} \Omega_j\right) = P_k(A) \quad \text{für } A \in \mathscr{A}^{(k)},\ k \in \mathbb{N} \tag{5.4}$$

erfüllt. Zu zeigen: P ist $\emptyset$-stetig auf $\mathcal{C}$, zeige dazu:

$A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $A_n \in \mathcal{C}$ mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) =: \alpha > 0 \Rightarrow \bigcap_n A_n \neq \emptyset$

O.E. $A_n = A_n' \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots$ für $A_n' \in \mathscr{A}^{(n)}$

Sei für $n \geq m$: $h_{m,n}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m) := \left(\bigotimes_{j=m+1}^{n} k_j\right)\left((\omega_0, \dots, \omega_m), A_n'\right)$

(mit $h_{m,m}(\omega_0, \dots, \omega_m) := \mathbb{1}_{A_m'}(\omega_0, \dots, \omega_m)$) (mit $\omega_i \in \Omega_i$)

$$h_{m,n+1}(\omega_0, \dots, \omega_m) = \left(\bigotimes_{j=m+1}^{n+1} k_j\right)\left((\omega_0, \dots, \omega_m), A_{n+1}'\right) \leq \left(\bigotimes_{j=m+1}^{n+1} k_j\right)\left((\omega_0, \dots, \omega_m), A_n' \times \Omega_{n+1}\right)$$

$$= \left(\bigotimes_{j=m+1}^{n} k_j\right)\left((\omega_0, \dots, \omega_m), A_n'\right) = h_{m,n}(\omega_0, \dots, \omega_m)$$

also:

$h_m(\omega_0, \dots, \omega_m) := \lim_{n \to \infty} h_{m,n}(\omega_0, \dots, \omega_m)$ existiert

$(= \inf_{n \geq m} h_{m,n}(\dots))$

[1]Cassius Ionescu-Tulcea, *1923

Satz 5.9 (Ionescu-Tulcea[1]). *Es gibt genau ein W'maß P auf $(\Omega, \mathscr{A})$, das*

$$P\Big(A \times \bigtimes_{j=k+1}^{\infty} \Omega_j\Big) = P_k(A) \quad \text{für } A \in \mathscr{A}^{(k)},\ k \in \mathbb{N} \tag{5.4}$$

erfüllt.

$$\int_{\Omega_0 \times \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_m} h_m \, dP_m = \inf_{n \geq m} \int_{\Omega^{(m)}} h_{m,n} \, dP_m = \inf_{n \geq m} \overbrace{P_n(A_n')}^{= P(A_n')} = \alpha > 0$$

(Ziel: $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$) Zeige $(\tilde\omega_0, \tilde\omega_1, \ldots) \in \Omega$ mit $h_m(\tilde\omega_0, \ldots, \tilde\omega_m) \geq \alpha$.

$m = 0$: $\int h_0(\omega_0) P_0(d\omega_0) \geq \alpha \Rightarrow \exists\, \tilde\omega_0$ mit $h_0(\tilde\omega_0) \geq \alpha$.

Seien $\tilde\omega_0, \ldots, \tilde\omega_m$ bereits gewählt.

$$\int_{\Omega_{m+1}} h_{m+1}(\tilde\omega_0, \ldots, \tilde\omega_m, \omega_{m+1})\, k_{m+1}((\tilde\omega_0, \ldots, \tilde\omega_m), d\omega_{m+1})$$

$$= \inf_{n \geq m+1} \int_{\Omega_{m+1}} h_{m+1,n}(\tilde\omega_0, \ldots, \tilde\omega_m, \omega_{m+1})\, k_{m+1}((\tilde\omega_0, \ldots, \tilde\omega_m), d\omega_{m+1})$$

$$= \inf_{n \geq m+1} h_{m,n}(\tilde\omega_0, \ldots, \tilde\omega_m) = h_m(\tilde\omega_0, \ldots, \tilde\omega_m) \geq \alpha$$

$\Rightarrow \exists\, \tilde\omega_{m+1}$ mit der gewünschten Eigenschaft.

[1] Cassius Ionescu-Tulcea, *1923

Satz 5.9 (Ionescu-Tulcea[1]). *Es gibt genau ein W'maß P auf $(\Omega, \mathscr{A})$, das*

$$P\Big(A \times \bigtimes_{j=k+1}^{\infty} \Omega_j\Big) = P_k(A) \quad \textit{für } A \in \mathscr{A}^{(k)},\ k \in \mathbb{N} \tag{5.4}$$

erfüllt.

$$\int_{\Omega_0 \times \Omega_1 \times \dots \times \Omega_m} h_m \, dP_m = \inf_{n \geq m} \int_{\Omega^{(m)}} h_{m,n} \, dP_m = \inf_{n \geq m} P_n(A_n') = \alpha > 0$$

(Ziel: $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$) Zeige $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots) \in \Omega$ mit $h_m(\tilde{\omega}_0, \dots, \tilde{\omega}_m) \geq \alpha$.

Tatsächlich: $(\tilde{\omega}_0, \tilde{\omega}_1, \dots) \in \bigcap_n A_n$, denn

$\alpha \leq h_{m,m}(\tilde{\omega}_0, \dots, \tilde{\omega}_m) = \mathbb{1}_{A_m'}((\tilde{\omega}_0, \dots, \tilde{\omega}_m))$ für jedes m

$$\Rightarrow (\tilde{\omega}_0, \dots, \tilde{\omega}_m, \tilde{\omega}_{m+1}, \dots) \in \underbrace{A_m' \times \Omega_{m+1} \times \dots}_{= A_m}$$

$\square$

[1] Cassius Ionescu-Tulcea, *1923

Korollar 5.10 (Abzählbar unendliches Produktmaß). *Seien* $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, P_i)$, $i \in \mathbb{N}_0$ *W'räume. Es gibt genau ein W'maß* P, *geschrieben* $P = \bigotimes_{i=0}^{\infty} P_i$, *auf* $\Omega := \bigtimes_{i=0}^{\infty} \Omega_i$, $\mathscr{A} := \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathscr{A}_i$ *mit*

$$P\big(A_0 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \cdots\big) = \prod_{i=0}^{n} P_i(A_i) \quad \textit{für } n \in \mathbb{N},\ A_i \in \mathscr{A}_i.$$

Wähle $\kappa_i((\omega_0, \dots, \omega_i), A) := P_{i+1}(A)$ für $A \in \mathscr{A}_{i+1}$.

Korollar 5.11. S *endl. oder abzählbar,* μ *W'maß auf* S, $(p_{x,y})_{x,y\in S}$ *stochastische Matrix auf* S. *Es gibt genau ein W'maß* P *auf* $S^{\mathbb{Z}_+}$ *mit*

$$P\big(\{x_0\} \times \{x_1\} \times \cdots \{x_n\} \times S^{\mathbb{N}}\big) = \mu_{x_0} p_{x_0,x_1} \cdots p_{x_{n-1},x_n} \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}, x_0, \dots, x_n \in S$$

Wähle $\kappa_i((x_0, x_1, \dots, x_i), \{x_{i+1}\}) := p_{x_i, x_{i+1}}$

5.2 Faltung

Definition 5.12. Für messbare $f, g : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ ist die *Faltung* $f * g : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ gegeben durch

$$(f * g)(x) = \int_{R^d} f(y) g(x - y)\, \lambda^d(dy), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$

Für endliche Maße μ, ν auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ ist die Faltung $\mu * \nu$ gegeben durch

$$(\mu * \nu)(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(A - x)\, \mu(dx), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Lemma 5.13. *$f * g : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ ist messbar, es gelten $f * g = g * f$ und $\int (f * g)\, d\lambda = \left(\int f\, d\lambda\right)\left(\int g\, d\lambda\right)$. $\mu * \nu = \nu * \mu$ ist ein endliches Maß mit $(\mu * \nu)(\mathbb{R}^d) = \mu(\mathbb{R}^d)\nu(\mathbb{R}^d)$.*

Bew.: $(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y) f(x-y) \lambda^d(dy) \overset{y = x - z}{=} \int_{\mathbb{R}^d} g(x-z) f(z) \lambda^d(dz)$ $= (f*g)(x)$

$\int (f*g)(x) \lambda^d(dx) = \int \int f(y) g(x-y) \lambda^d(dy) \lambda^d(dx)$ (mit Fubini) $= \int f d\lambda^d \int g d\lambda^d$

$\lrcorner$

Satz 5.14. *i) X, Y unabhängige $\mathbb{R}^d$-wertige ZVn mit Dichte f_X bzw. f_Y, so hat $X+Y$ die Dichte $f_X * f_Y$.*

ii) $\mu = f\,\lambda^d$, $\nu = g\,\lambda^d$ endliche Maße auf $\mathbb{R}^d$ mit Dichten bzgl. dem d-dimensionalen Lebesgue-Maß λ^d, so ist $\mu * \nu = (f * g)\,\lambda^d$

Zu i) Sei $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : u + v \underset{\text{koord. weise}}{\leq} x\}$

$$P(X+Y \leq x) = P((X,Y) \in A)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} 1_A(u,v)\, f_X(u)\, f_Y(v)\, (\lambda^d \otimes \lambda^d)(d(u,v))$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} 1_A(u,v)\, f_X(u)\, \lambda^d(du)}\, f_Y(v)\, \lambda^d(dv)$$

$$= \int_{(-\infty, x-v]} f_X(u)\, \lambda^d(du) = \int_{(-\infty, x]} f_X(\tilde{u} - v)\, \lambda^d(d\tilde{u})$$

$$= \int_{(-\infty, x]} \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^d} f_X(\tilde{u} - v)\, f_Y(v)\, \lambda^d(dv) \right)}_{f_X * f_Y(\tilde{u})} \lambda^d(d\tilde{u}) \qquad \blacksquare$$