Satz 8.7. *Seien μ_n, $n \in \mathbb{N}$ W'maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_n und zugehörigen charakteristischen Funktionen φ_n, es gelte für $t \in \mathbb{R}$*

$(F_n(x) = \mu_n((-\infty, x]))$

$$\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t) \tag{8.4}$$

für eine gewisse Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die stetig in $t = 0$ ist. Dann ist φ die charakteristische Funktion eines (eindeutig bestimmten) W'maßes μ auf $\mathbb{R}$ und die Verteilungfunktion F von μ erfüllt

$$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x) \quad \text{für jeden Stetigkeitspunkt } x \text{ von } F \tag{8.5}$$

(Erinnerung: Bericht + Def. 5.4 aus Einf. i. d. Stoch. WS20/21:
„Konvergenz in Verteilung"
(für ZVn X_n, X mit $\mathcal{L}(X_n) = \mu_n$,
$\mathcal{L}(X) = \mu$))

Satz 8.8. *Seien μ_n, $n \in \mathbb{N}$ W'maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_n. Dann gibt es eine Teilfolge $n_k \nearrow \infty$ und eine nicht-fallende, rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit*

$$F_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} F(x) \quad \text{für jeden Stetigkeitspunkt } x \text{ von } F \qquad (\#) \tag{8.6}$$

Wenn zudem gilt

$$(*) \qquad \lim_{M\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\underbrace{F_n(-M) + 1 - F_n(M)}_{\mu_n((-\infty,-M] \cup (M,\infty))} \Big) = 0 \tag{8.7}$$

so ist F die Verteilungsfunktion eines W'maßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(d.h. $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$)

Eigenschaft $(*)$ nennt man auch „Straffheit“.

Bew.: Zwischen-Ziel: $(+)$ $F_{n_k}(q) \xrightarrow[k\to\infty]{} H(q)$ für $q \in \mathbb{Q}$ und eine gewisse Fkt $H(\cdot)$

Sei $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \ldots\}$ eine Aufzählung

- $\{F_n(q_1) : n \in \mathbb{N}\} \subset [0,1]$, wähle $(m_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$, $m_{1,k} \nearrow_{k\to\infty} \infty$, so dass $\lim_{k\to\infty} F_{m_{1,k}}(q_1) =: H(q_1)$ ex.

- $\{F_{m_{1,k}}(q_2) : k \in \mathbb{N}\} \subset [0,1]$, wähle $(m_{2,k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \{m_{1,\ell} : \ell \in \mathbb{N}\}$, $m_{2,k} \nearrow_{k\to\infty} \infty$, so dass $\lim_{k\to\infty} F_{m_{2,k}}(q_2) =: H(q_2)$ ex.

$\vdots$

- im j-ten Schritt wurde Folge $(m_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $m_{j,k} \nearrow_{k\to\infty} \infty$ und $F_{m_{j,k}}(q_\ell) \xrightarrow[k\to\infty]{} H(q_\ell)$ mit $\ell = 1, 2, \ldots, j$, dünne erneut aus, etc.

Setze $n_k := m_{k,k}$, dies leistet $(+)$

$H(q),\ q \in \mathbb{Q}$ ist nicht-fallend.

$F(x) := \inf\{H(q) : q \in \mathbb{Q},\ q > x\}$ ist nicht nicht-fallend, hat Werte in $[0,1]$ (ist rechts-stetig)

Sei $x \in \mathbb{R}$, wähle $q \in \mathbb{Q}$, $q > x$:

$$\limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(x) \le \limsup_{k\to\infty} F_{n_k}(q) = H(q)$$

mit $q \downarrow x$: $\limsup F_{n_k}(x) \le F(x)$

Sei x ein Stetigk.pkt. von F (zu $\varepsilon > 0$ gibt es $q_0 \in \mathbb{Q}$ mit $q_0 > x$ und $F(x) \le H(q_0) < F(x) + \varepsilon$)

$\varepsilon > 0$, es gibt $h\ (= h(x,\varepsilon))$ so dass $F(x) \le F(x-h) + \varepsilon$,

wähle $q \in \mathbb{Q} \cap (x-h, x)$:

mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt $(\#)$

$$\liminf_{k} F_{n_k}(x) \ge \liminf_{k} F_{n_k}(q) = H(q) \ge F(x-h) \ge F(x) - \varepsilon$$

Falls $(*)$ gilt: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein M mit

$H(q) \leq \varepsilon$ für $q \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, -M)$

$H(q) \geq 1 - \varepsilon$ — " — $q \in \mathbb{Q} \cap (M, \infty)$

$\Rightarrow$ $F(x) \leq \varepsilon$ für $x < -M$

$F(x) \geq 1 - \varepsilon$ für $x > +M$.

$\lrcorner$

Lemma und Definition 8.9. *Seien $\mu_n, n \in \mathbb{N}$ und μ W'maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_n bzw. F. Dann sind äquivalent*

i) $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$ *für jeden Stetigkeitspunkt x von F*

$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X$

ii) $\int g \, d\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int g \, d\mu$ *für jede stetige und beschränkte Funktion g auf $\mathbb{R}$*

$\mathbb{E}[g(X_n)]$ (dom. Konv.) $\downarrow n\to\infty$ $\mathbb{E}[g(X)]$

Man sagt dann, dass die Folge μ_n schwach gegen μ konvergiert und schreibt dies auch als

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mu \quad \text{oder} \quad \mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu$$

Bericht. Die Bezeichnung „schwache Konvergenz“ für den Sachverhalt aus Definition 8.9 ist in der Stochastik üblich, in der Funktionalanalysis würde man dies eher als „schwach-*-Konvergenz“ bezeichnen.

Skizze für i) ⇒ ii): Sei $U \sim \mathrm{Unif}[0,1]$,

$X_n := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) > U\}$, $X := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > U\}$,

$\Rightarrow X_n \sim \mu_n$, $X \sim \mu$

es gilt: $D = \{F(x), F(x-) : x$ ist Unstetigkt.st. von $F\} \cup \{0,1\}$:

$\{U \notin D\} \subset \{X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X\}$, D ist abzählbar $\Rightarrow P(U \in D) = 0$

Bew. von Satz 8.7

$$\varphi_n(t) + \varphi_n(-t) = \int_{\mathbb{R}} 2\cos(tx)\,\mu_n(dx) \in [-2,2]$$

$$\Longrightarrow \varphi(t) \in [-2,2].$$

$\varepsilon > 0$, dann gibt es $\delta > 0$ so dass

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \big(2 - \varphi(t) - \varphi(-t)\big)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

mit Voraus. + dom. Konv. gilt auch (für $n \geq n_0$)

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta \big(2 - \varphi_n(t) - \varphi_n(-t)\big)\,dt < \varepsilon$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{itx})\,\mu_n(dx)\,dt = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(1-e^{itx})\,dt}_{=\int_{-\delta}^{\delta} 1-\cos(tx)\,dt}\,\mu_n(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{2\left(1 - \frac{\sin(\delta x)}{\delta x}\right)}_{\geq 2\left(1 - \frac{1}{|\delta x|}\right)^+} \mu_n(dx)$$

also:

$$2\int \left(1-\frac{1}{|\delta x|}\right)^+ \mu_n(dx) \le \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad \mu_n\Big(\underbrace{[-2/\delta, 2/\delta]^c}_{[-M,M]^c}\Big) \le \varepsilon \quad \text{für } n \ge n_0$$

vergrößere ggfs. M geeign. $\Longrightarrow$ $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n([-M,M]^c) \le \varepsilon$

$\Longrightarrow$ Satz 8.8 $\exists$ Folge n_k und F, das Vert.fkt. eines W'maßes μ ist

mit $F_{n_k}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} F(x)$ an allen Stetigk.stellen x von F

$$\Longrightarrow \quad \varphi_{n_k}(t) = \int e^{itx}\mu_n(dx) \longrightarrow \int e^{itx}\mu(dx) = \varphi(t),$$

gleicher Grenzwert längs jeder anderen konv. T-f.

$$\Longrightarrow \quad \mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mu.$$

$\lrcorner$

8.2 Zentraler Grenzwertsatz (in $\mathbb{R}^1$)

Satz 8.10 („Zentraler Grenzwertsatz"). *Seien* $X_1, X_2, \dots$ *u.i.v. reelle ZVn* $\in \mathcal{L}^2$ *mit* $\sigma^2 = \operatorname{Var}[X_1] \in (0,\infty)$, *dann gilt für* $-\infty \le a < b \le \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a \le \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} \le b\right) = \mathbb{P}(a \le Z \le b) \quad \textit{mit } Z \sim \mathcal{N}_{0,1}.$$

Bew.: O.E. sei $\mathbb{E}[X_1]=0$, $\operatorname{Var}[X_1]=1$ (sonst betr. $\tilde{X}_i = \frac{(X_i - \mathbb{E}[X_1])}{\sqrt{\operatorname{Var}[X_1]}}$)

$$Y_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} = \frac{X_1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{X_n}{\sqrt{n}}$$

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{t^2}{n}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \text{„Rest"}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-t^2/2} = \varphi_{\mathcal{N}_{0,1}}(t)$$

$\lrcorner$

Williams, Ch. 15.3 "Mabinogion Sheep problem"
Peredur fab Efrawg

magische Schafherde:
schwarze und weiße, bei jedem Blöken wechselt ein Schaf die Farbe

Als Markovkette: $(S_n, W_n)_n$, Übergänge $(s,w) \to (s+1, w-1)$ mit W'keit $\frac{s}{s+w}$

$(s,w) \to (s-1, w+1)$ mit W'keit $\frac{w}{s+w}$

(solange s und $w \geq 1$)

$s_0+w_0 = s+w = g$ bleibt konstant.

(irred. im „Inneren" von $\{(s,w) : s+w=g\}$)

„Kontrollaufgabe"
Am Anfang und nach jedem Blöken darf eine beliebige Anzahl weißer Schafe entfernt werden.
Ziel: möglichst viele schwarze Schafe am Ende!

Ohne Kontrolle: $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = 0 \text{ oder } W_n = 0\}$,

Startpkt $S_0 = s_0$, $W_0 = w_0$ mit $s_0 + w_0 = g$

$$h_g(x) := \mathbb{P}_{(x,g-x)}(S_\tau = g) \quad , \quad h_g(g) = 1, \quad h_g(0) = 0$$

Zerlegung n. dem 1. Schritt

$$h_g(x) = \frac{x}{g} h_g(x+1) + \frac{g-x}{g} h_g(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{g}\underbrace{\left(h_g(x+1) - h_g(x)\right)}_{=:\Delta(x)} = \frac{g-x}{g}\left(h_g(x) - h_g(x-1)\right)$$

$$\Rightarrow \Delta(x) = \frac{g-x}{x}\Delta(x-1) = \frac{(g-x)(g-x+1)}{x(x-1)}\Delta(x-2) = \ldots$$

$$= \ldots \Delta(0) \cdot \prod_{y=1}^{x} \frac{g-y}{y} = \Delta(0)\binom{g-1}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad h_g(x) = 2^{-(g-1)} \sum_{y=0}^{x-1} \binom{g-1}{y} = \mathbb{P}\left(B_{g-1,1/2} < x\right)$$

$\mathrm{Bin}_{g-1,1/2}$-vert.

z.B.

$$s_0 = k = w_0 \quad \Longrightarrow \quad h_{2k}(k) = \tfrac{1}{2}$$

$$s_0 = k + C\cdot\sqrt{k}, \quad w_0 = k - C\cdot\sqrt{k}$$

$$h_{2k}(s_0) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{B_{2k-1,1/2} < k + C\sqrt{k}}_{\Longleftrightarrow\ \frac{B_{2k-1,1/2} - \frac{1}{2}2k}{\sqrt{k\frac{1}{4}}} \,\lesssim\, 2C}\Big)$$

Mit Kontrolle:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_j, W_j : j=0,1,\dots,n)$$

R_n ... $\mathcal{F}_n$-m.b. mit $R_n \le S_n$

Dynamik: S_0, W_0 gegeben, $U_1, U_2, \dots$ u.i.v. $\sim \mathrm{Unif}_{[0,1]}$, u.a. von (S_0, W_0)

$$S_{n+1} = S_n + 2\,\mathbb{1}_{\{U_{n+1} \le S_n/(S_n+W_n-R_n)\}} - 1,$$

analog
$$W_{n+1} = W_{n+1} - R_n - 2\,\mathbb{1}_{\{U_{n+1} \le S_n/(S_n+W_n-R_n)\}} - 1,$$

„Strategie" $\Longleftrightarrow$ Wahl (der Vert./Konstr.) von R_n, $n=0,1,\dots$

<u>Strategie A</u>: $R_n = (W_n - S_n + 1)^+$

(unter dieser Strategie ist $(S_n, W_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Markovkette.

Wertfunktion zu Strategie A

$$V(s,w) = \mathbb{E}^{(A)}_{(s,w)}\left[S_\tau \right] \qquad \left(\text{mit } \tau = \inf\{n : S_n \cdot W_n = 0\}\right)$$

Beob.: $(*)$ $V(s,w) = V(s,w-1)$ für $w \geq s \vee 1$

$(**)$ $V(s,w) = \frac{s}{s+w} V(s+1,w-1) + \frac{w}{s+w} V(s-1,w+1)$

Lemma $V(s,w) \geq V(s,w-1)$ für $s > w > 0$

$V(s,w) \geq \frac{s}{s+w} V(s+1,w-1) + \frac{w}{s+w} V(s-1,w+1)$

vgl. Wi, Ch. 15 (sofern $s,w \geq 1$)

Unter (irgendeiner) Strategie B ist | d.h. Strat. A ist opt.

$(V(S_n, W_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal (und pos., beschr.)

$$\Rightarrow V(s_0,w_0) = \mathbb{E}^{(B)}_{(s_0,w_0)}\left[V(S_n, W_n) \right] \geq \mathbb{E}^{(B)}_{(s_0,w_0)}\left[\overbrace{V(S_\tau, W_\tau)}^{= S_\tau} \right]$$