Satz 5.14. *i) X, Y unabhängige $\mathbb{R}^d$-wertige ZVn mit Dichte f_X bzw. f_Y, so hat $X+Y$ die Dichte $f_X * f_Y$.*

ii) $\mu = f\,\lambda^d$, $\nu = g\,\lambda^d$ endliche Maße auf $\mathbb{R}^d$ mit Dichten bzgl. dem d-dimensionalen Lebesgue-Maß λ^d, so ist $\mu * \nu = (f * g)\,\lambda^d$

Zu i) Sei $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $A = \{(u,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : u+v \le x\}$

Koord. weise

$$\mathbb{P}(X+Y \le x) = \mathbb{P}((X,Y) \in A)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(u,v) f_X(u) f_Y(v) \, (\lambda^d \otimes \lambda^d)(d(u,v))$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(u,v) f_X(u)\, \lambda^d(du)}_{= \int_{(-\infty, x-v]} f_X(u)\,\lambda^d(du) = \int_{(-\infty,x]} f_X(\tilde u - v)\,\lambda^d(d\tilde u)} f_Y(v)\, \lambda^d(dv)$$

$$= \int_{(-\infty,x]} \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^d} f_X(\tilde u - v) f_Y(v)\, \lambda^d(dv) \right]}_{f_X * f_Y(\tilde u)} \lambda^d(d\tilde u) \qquad \square$$

Erinnerungen:

$$\mathcal{N}_{\mu_1,\sigma_1^2} * \mathcal{N}_{\mu_2,\sigma_2^2} = \mathcal{N}_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

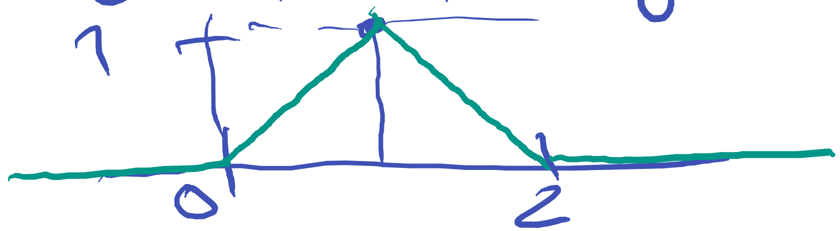
$$\Gamma_{\underline{\underline{a_1}},\nu_1} * \Gamma_{\underline{\underline{a_1}},\nu_2} = \Gamma_{a_1,\nu_1+\nu_2}$$

$$\mathrm{Bin}_{n_1,\underline{\underline{p_1}}} * \mathrm{Bin}_{n_2,\underline{\underline{p_1}}} = \mathrm{Bin}_{n_1+n_2,p_1}$$

$\mathrm{Unif}_{[0,1]} * \mathrm{Unif}_{[0,1]}$ hat Dichte:

$x \in \mathbb{R}$:
$$\int \underbrace{\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)}_{\text{ist 1 wenn } 0\vee(x-1)\le y\le 1\wedge x}\,\lambda(dy)$$

$$= (1\wedge x) - (x-1)^+$$



Kapitel 6

Zur bedingten Erwartung

Erinnerung 6.1. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ W'raum, $B \in \mathscr{F}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$.

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad A \in \mathscr{F}$$

heißt die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A, gegeben B*.

approximiere dann allg. Y mittels elementaren Funktionen

$\mathbb{P}(\cdot \mid B)$ definiert durch diese Formel ein W'Maß auf $(\Omega, \mathscr{F})$ mit $\mathbb{P}(B \mid B) = 1$, für $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ ist

$$\mathbb{E}[Y \mid B] = \int Y(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega \mid B) = \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_B Y]}{\mathbb{P}(B)}.$$

(Denn: für $Y = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$ ist

$$\frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | B]$$

Bemerkung 6.2 (Diskreter Fall der bedingten Erwartung). X und Y Zufallsvariablen (auf einem W'raum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$), $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, X nehme höchstens abzählbar viele Werte $x_1, x_2, \dots$ an. Setze

$$f(x) := \underbrace{\mathbb{E}[Y \mid \{X = x\}]}_{= \frac{1}{\mathbb{P}(X=x)} \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_{\{X=x\}}]} \quad \text{für } x \in \{x_1, x_2, \dots\}$$

(nehme an: $\mathbb{P}(X=x) > 0$ für alle Punkte im Wertebereich)

und $\mathbb{E}[Y \mid X] := f(X)$.

$\mathbb{E}[Y \mid X]$ ist $\sigma(X)$-messbar (es ist eine Funktion von X) und für $A \in \sigma(X)$ gilt

$$\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y \mid X] \mathbf{1}_A\big]$$

Denn: Für $A = \{X = x_i\}$ ist

$$\text{r. S.} \underset{(*)}{=} \mathbb{E}[f(\underbrace{X}_{=x_i}) \mathbb{1}_{\{X=x_i\}}] = f(x_i) \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$= \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_{\{X=x_i\}}] = \text{l. S.}$$

allg. $A \in \sigma(X)$ hat die Form $\{X \in B\} = \dot{\bigcup}_{x \in B} \{X = x\}$ für ein $B \subset \{x_1, x_2, \dots\}$

also $\mathbb{1}_B(X) = \sum_{x \in B} \mathbb{1}_{\{x\}}(X)$

Linearität des EW & dom. Konv. liefern den allg. Fall.

Wir betrachten im folgenden einen W'raum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Definition 6.3. $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ Teil-σ-Algebra. Eine reellwertige ZV Y heißt (eine Version der) bedingte(n) Erwartung von X gegeben $\mathscr{G}$ (geschrieben $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$), wenn gilt

i) Y ist $\mathscr{G}$-messbar,

ii) $\mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A]$ für alle $A \in \mathscr{G}$.

Bemerkung. Äquivalent kann ii) durch ii') ersetzt werden:

ii') $\quad \mathbb{E}[Y \cdot H] = \mathbb{E}[X \cdot H] \quad$ für alle reellwertigen, beschränkten, $\mathscr{G}$-messbaren ZVn H.

Falls $\mathscr{G} = \sigma(Z)$ für eine Zufallsvariable Z, so schreibt man oft auch $\mathbb{E}[X \mid Z] := \mathbb{E}[X \mid \sigma(Z)]$.

ii') $\Rightarrow$ ii) ✓, ii) $\Rightarrow$ ii') : „übliche Approximationsargumente"

Satz 6.4. *Für $X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{P})$ existiert $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$ und ist eindeutig (bis auf $\mathbb{P}$-f.s.-Gleichheit).*

Eindeutigkeit: Seien $Y, \tilde{Y}$ (Versionen von) $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$.

$$\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{\underbrace{\{Y > \tilde{Y}\}}_{\in \mathcal{G}}}] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{\{Y > \tilde{Y}\}}]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(Y - \tilde{Y}) \mathbb{1}_{\{Y > \tilde{Y}\}}] = 0 = \mathbb{E}[\tilde{Y} \mathbb{1}_{\{Y > \tilde{Y}\}}]$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y > \tilde{Y}) = 0, \text{ analog: } \mathbb{P}(Y < \tilde{Y}) = 0.$$

Zur Existenz:

Sei (zunächst) $X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$. $\mathcal{H} = \{Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}) : Y\ \mathcal{G}\text{-messb.}\}$

ist Unterraum ✓

ist abgeschl. ✓ $\mathcal{L}^2$

$Y_n \in \mathcal{H}$, $Y_n \to Y$

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $n_k \nearrow \infty$ mit $Y_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} Y$ f.s.

setze $Y := \mathrm{Proj}_{\mathcal{H}}(X) \in \mathcal{H}$

dann gilt $\forall Z \in \mathcal{H}$:

$$\mathbb{E}[(X - Y) \cdot Z] = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X \cdot Z] = \mathbb{E}[Y \cdot Z]$$

damit: Y $\mathcal{G}$-messb.

Satz 6.4. *Für $X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{P})$ existiert $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$ und ist eindeutig (bis auf $\mathbb{P}$-f.s.-Gleichheit).*

Sei nun $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$.

1) Falls $X \geq 0$. $\quad Y_n := \mathbb{E}[\underbrace{X \wedge n}_{\in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})} \mid \mathcal{G}] \underset{n\to\infty}{\nearrow} \overset{\text{ist } \mathcal{G}\text{-m.b.}}{Y} (\geq 0)$ f.s.

beob.: $\tilde{X} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}),\ \tilde{X} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}[\tilde{X} \mid \mathcal{G}]}_{= \tilde{Y}} \geq 0,$

denn $\mathbb{E}[\tilde{Y} \cdot \mathbb{1}_{\{\tilde{Y} < 0\}}] = \underbrace{\mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \mathbb{1}_{\{\tilde{Y}<0\}}]}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \tilde{Y} \geq 0$ f.s.

$A \in \mathcal{G}$:

$$\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}[(X \wedge n)\mathbb{1}_A]}_{= \mathbb{E}[Y_n \mathbb{1}_A]} = \mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_A]$$

2) allg.: $X = X^+ - X^-$,

$$Y := \mathbb{E}[X^+ \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X^- \mid \mathcal{G}]$$

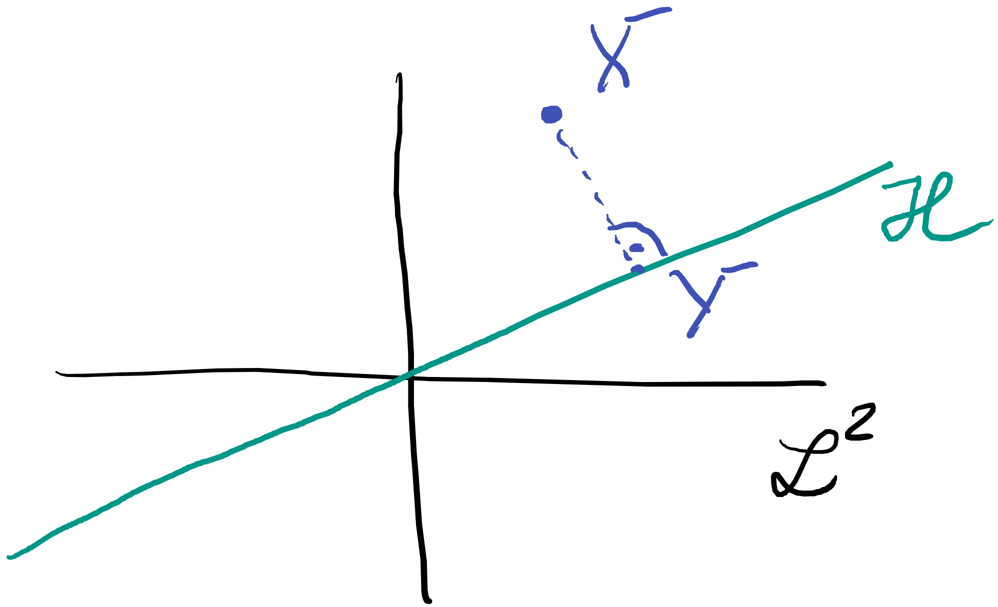
$\lrcorner$

Satz 6.5. *$\mathscr{H} \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ abgeschlossener Unterraum. Zu $X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ gibt es (bis auf $\mathbb{P}$-f.s. Gleichheit) genau ein $Y \in \mathscr{H}$ mit*

i) $\|Y - X\|_2 = \inf\left\{\|W - X\|_2 : W \in \mathscr{H}\right\}$

ii) $\mathbb{E}\big[(X - Y)Z\big] = 0$ *für alle* $Z \in \mathscr{H}$

Y ist (die Äquivalenzklasse) der orthogonalen Projektion von X auf $\mathscr{H}$, auch $\mathrm{Proj}_{\mathscr{H}}(X)$ *geschrieben.*



Satz 6.6. *$X, Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ Teil-σ-Algebra.*

i) $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathscr{G}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathscr{G}]$ *f.s. für* $a, b \in \mathbb{R}$ *(Linearität)*

ii) $X \leq Y$ *f.s.* $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{G}]$ *f.s.* *(Monotonie)*

iii) $\left|\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]\right| \leq \mathbb{E}\left[|X| \,\middle|\, \mathscr{G}\right]$ *f.s.* *(Dreiecksungleichung)*

iv) Es gelte $\mathbb{E}\left[|XY|\right] < \infty$ *und* Y *sei* $\mathscr{G}$*-messbar, dann ist*

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathscr{G}] = Y \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] \ \text{f.s.},$$

insbesondere ist $\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] = Y$ *f.s.* *(„Herausziehen von Bekanntem“)*

v) Sind $\sigma(X)$ *und* $\mathscr{G}$ *unabhängig, so ist* $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbb{E}[X]$ *f.s.* *(Verhalten bei Unabhängigkeit)*

vi) $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ *Teil-σ-Algebra, so ist*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] \,\middle|\, \mathscr{G}'\right] = \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}'] \ \text{f.s.},$$

(„Turmeigenschaft“) insbesondere ist

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]] = \mathbb{E}[X]$$

Satz 6.6 (Fortsetzung)**.** *$X, Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ Teil-σ-Algebra.*

vii) $0 \le X_n \nearrow X$ f.s. für $n \to \infty$, so gilt

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathscr{G}] \underset{n\to\infty}{\nearrow} \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] \quad \textit{f.s. und in } \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$$

(monotone Konvergenz)

viii) X_n reelle ZVn mit $|X_n| \le Y \ \forall\, n$ und $X_n \to X$ f.s., so gilt

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathscr{G}] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] \quad \textit{f.s. und in } \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$$

(dominierte Konvergenz)

i) $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathscr{G}] = a\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] + b\mathbb{E}[Y \mid \mathscr{G}]$ f.s. r. S. <u>ist</u> $\mathscr{G}$-m. b. ✓

$A \in \mathscr{G}$. $\mathbb{E}[(a\,\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] + b\,\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}])\mathbb{1}_A]$

$= a\,\underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\cdot\mathbb{1}_A]}_{\mathbb{E}[X\cdot\mathbb{1}_A]} + b\cdot\underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]\cdot\mathbb{1}_A]}_{\mathbb{E}[Y\cdot\mathbb{1}_A]}$

$= \mathbb{E}[(aX+bY)\cdot\mathbb{1}_A]$

ii) $X \leq Y$ f.s. $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathscr{G}]$ f.s. ✓

$A := \{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] > \mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]\} \in \mathscr{G}$

$0 \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(Y-X)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(\underbrace{\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}] - \mathbb{E}[X|\mathscr{G}]}_{<0 \text{ auf } A})]$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0$

iii) $\left|\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]\right| \le \mathbb{E}\big[|X| \,\big|\, \mathscr{G}\big]$ f.s.

$$\left|\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]\right| = \left|\mathbb{E}[X^+ \mid \mathscr{G}] - \mathbb{E}[X^- \mid \mathscr{G}]\right|$$

$$\le \mathbb{E}[X^+ \mid \mathscr{G}] + \mathbb{E}[X^- \mid \mathscr{G}]$$

$$\underset{\text{f.s.}}{=} \mathbb{E}[X^+ + X^- \mid \mathscr{G}] = \mathbb{E}[|X| \mid \mathscr{G}] \quad (\text{f.s.})$$

allg. Fall: $X = X^+ - X^-$, $Y = Y^+ - Y^-$

iv) $\mathbb{E}\big[|XY|\big] < \infty$ und Y sei $\mathscr{G}$-messbar $\Rightarrow \mathbb{E}[XY \mid \mathscr{G}] = Y \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$ f.s.

Seien $X, Y \ge 0$, $Y_n = 2^{-n}\lfloor 2^n Y \rfloor \wedge n$ $\left(\nearrow_{n\to\infty} Y\right)$

$A \in \mathscr{G}$: $$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A (Y \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}])] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Y_n \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{\{Y_n = \frac{k}{2^n}\}}}_{= \mathbb{1}_{A \cap \{Y_n = k/2^n\}} \in \mathscr{G}} \cdot \frac{k}{2^n} \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n\cdot 2^{n}} \frac{k}{2^n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{Y_n = k/2^n\}} \cdot X] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Y X]$$