Satz 3.12 (Lemma von Fatou[4]). *$f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f_n \geq f$ μ-f.ü., so gilt*

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu$$

Bew.: O.E. seien $f_1, f_2, \dots \geq 0$ f.ü. (sonst betrachte $f_n - f$).

$g_n := \inf_{m \geq n} f_m$ erfüllt

$$\int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu \quad \text{und} \quad g_n \underset{n \to \infty}{\nearrow} \liminf_{k \to \infty} f_k$$

$$\underset{\text{Satz 3.11}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\int g_n \, d\mu}_{\leq \int f_n \, d\mu} \xrightarrow[n \to \infty]{} \int \liminf_k f_k \, d\mu$$

$\lrcorner$

[4]Pierre Fatou, 1878–1929

Satz 3.13 (Dominierte Konvergenz, Konvergenzsatz von Lebesgue)**.** $f, f_1, f_2, \ldots$ *messbare Funktionen, es gelte*

$$f_n \to f \ \mu\text{-f.ü.} \quad \textit{und} \quad |f_n| \leq g \ \mu\text{-f.ü. für ein } g \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Dann gilt $f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und*

$$\int |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \textit{insbesondere} \int f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f \, d\mu.$$

denn $|\int f d\mu - \int f_n d\mu| \leq \int |f - f_n| d\mu$

Bew.: $\int |f_n| d\mu, \int |f| d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty$, d.h. „alle Beteiligten in $\mathcal{L}^1(\mu)$".

$0 \leq 2g - |f - f_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2g \quad \mu$-f.ü.

$\underset{\text{Satz 3.12}}{\Longrightarrow} \int 2g \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\int 2g - |f - f_n| \, d\mu}_{= \int 2g d\mu - \int |f - f_n| d\mu}$

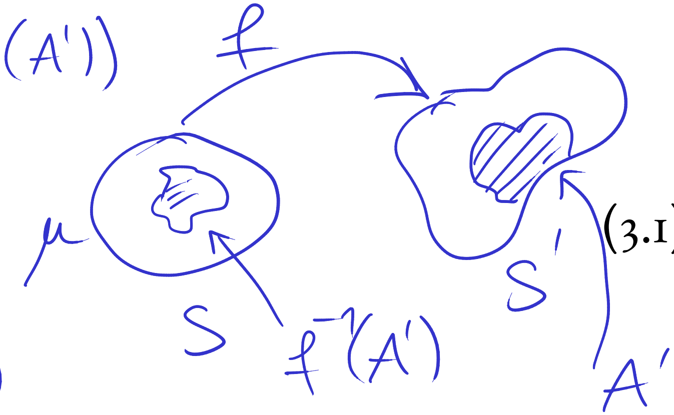
$= \int 2g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \underbrace{\int |f - f_n| \, d\mu}_{\geq 0}$

$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu = 0$

Satz 3.14 (Maßtransformation und Integral). *$(S, \mathscr{A})$, $(S', \mathscr{A}')$ messbare Räume, μ Maß auf $(S, \mathscr{A})$, $f : S \to S'$ messbar, $\mu' := \mu \circ f^{-1}$* (d.h. $\mu'(A') = \mu(f^{-1}(A'))$)

Für $g \in \mathcal{L}^1(\mu')$ oder $g : S' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ gilt

$$(*) \qquad \int g \, d\mu' = \int g \circ f \, d\mu \tag{3.1}$$



(μ' heißt das Bildmaß von μ unter f.)

Bew.: $\mathcal{K} = \{ g : S' \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ m.b.} \mid (*) \text{ gilt für } g \}$.

Für $A' \in \mathscr{A}'$, $g = \mathbb{1}_{A'}$: $\int g \, d\mu' = \mu'(A') = \mu(f^{-1}(A'))$

d.h. $(*)$ gilt. $= \int g(f(x)) \, \mu(dx)$,

Abgeschlossenheit unter (nicht-neg.) Linearkomb. ✓ (Integrale linear)

—— " —— monotonen Limiten ✓ (verwende links & rechts Satz v.d. monotonen Konv.)

$\Rightarrow \mathcal{K} = \{ g : S' \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ m.b.} \}$,

Beob. 3.15

Allg. Fall: $g \in \mathcal{L}^1(\mu')$, schreibe $g = g^+ - g^-$, verwende obiges für g^+ und g^- ⌟

Beobachtung 3.15 (Monotonieprinzip)**.** $(S, \mathscr{A})$ messbarer Raum, sei $\mathscr{K} \subset \{f : f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ messbar}\}$ mit

i) $a, b \in \mathbb{R}_+, f, g \in \mathscr{K} \implies af + bg \in \mathscr{K}$

ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{K}, f_n \nearrow f \implies f \in \mathscr{K}$

iii) $\mathbf{1}_A \in \mathscr{K}$ für $A \in \mathscr{A}$

Dann gilt $\mathscr{K} = \{f : f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ messbar}\}$.

Denn: Sei $f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar,

setze $f_n = 2^{-n}\lfloor 2^n f \rfloor \wedge n$ (messb. mit endl. vielen Werten, ≥ 0),

i) & iii) $\Rightarrow f_n \in \mathscr{K}$,

$f_n \nearrow f$, ii) $\Rightarrow f \in \mathscr{K}$

$\lrcorner$

Bemerkung und Schreibweise. Für $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ W'raum, $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ oder $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar schreibt man

$$\mathbb{E}[X] := \int X \, d\mathbb{P} \quad \text{„Erwartungswert“ von } X$$

Für eine $(S', \mathscr{A}')$-wertige ZV Y mit Verteilung ν, $g : S' \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$ gilt (insbesondere: g $(\mathscr{A}'$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-messbar)

$$\mathbb{E}\big[g(Y)\big] = \int g \circ Y \, d\mathbb{P} = \int g \, d\nu$$

(denn: $(g(Y))(\omega) = g(Y(\omega)) = (g \circ Y)(\omega)$)

Erinnerung:

Y hat Verteilung ν bedeutet $\mathbb{P}(\underbrace{Y \in A'}_{\text{„}\{\omega : Y(\omega) \in A'\} = Y^{-1}(A')\text{“}}) = \nu(A')$ für $A' \in \mathscr{A}'$.

d.h. ν ist das Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter Y.

Definition 3.16. μ, ν Maße auf $(S, \mathscr{A})$, $h : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar heißt (eine) *Dichte* von ν bezüglich μ, wenn gilt

$$\nu(A) = \int \mathbf{1}_A h \, d\mu, \quad A \in \mathscr{A}.$$

Man schreibt $\nu = h\mu$, symbolisch auch $d\nu = h d\mu$, $\frac{d\nu}{d\mu} = h$.

allg. Fall: $f = f^+ - f^-$, also $hf = hf^+ - hf^- = (hf)^+ - (hf)^-$

Lemma 3.17. *μ Maß auf $(S, \mathscr{A})$, $h : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar, so definiert*

(beachte: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$)

$$\nu(A) := \int \mathbf{1}_A h \, d\mu, \quad A \in \mathscr{A}$$

ein Maß auf $(S, \mathscr{A})$ (ν ist endlich, wenn $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$), für $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b. mit $f \geq 0$ μ-f.ü. oder $fh \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt

$$\int f \, d\nu = \int f h \, d\mu \quad (**) \tag{3.2}$$

Bew.: $\nu(\emptyset) = \int 0 \, d\mu = 0$,

seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ paarw. disjunkt. $\nu(\dot{\bigcup}_{n=1}^\infty A_n) = \int \underbrace{\mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{n=1}^\infty A_n} \cdot h}_{= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{A_n} \cdot h} \, d\mu$

d.h. ν ist Maß. monotone Konv. $\xrightarrow{} = \sum_{n=1}^\infty \int \mathbb{1}_{A_n} \cdot h \, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$,

$\mathcal{K} := \{ f : f : S \to \overline{\mathbb{R}}_+ \text{ m.b.}, (**) \text{ gilt für dieses } f \}$,

diese erfüllt die Voraussetzungen von Beob. 3.15. ✓ $\Rightarrow \mathcal{K} = \{$alle nicht-neg. m.b. Fkt.$\}$

Lemma 3.18. *$\nu = h\mu = h'\mu$ mit $h, h' : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ m.b., ν σ-endlich $\Longrightarrow h = h'$ μ-f.ü.*

Bew.: Sei ν (zunächst) endlich (d.h. $h, h' \in \mathcal{L}^1(\mu)$).

$$\cancel{\nu(\{h>h'\})} = \int 1\!\!1_{\{h>h'\}} \overset{= h-h'+h'}{\widetilde{h}}\, d\mu$$

$$= \int \underbrace{1\!\!1_{\{h>h'\}}(h-h')}_{=(h-h')^+}\, d\mu + \cancel{\underbrace{\int 1\!\!1_{\{h>h'\}}h'\, d\mu}_{=\nu(\{h>h'\})}}$$

$\Rightarrow \int (h-h')^+ d\mu = 0 \Rightarrow (h-h')^+ = 0$ μ-f.ü.,

analog: $(h-h')^- = 0$ μ-f.ü., d.h. $h = h'$ μ-f.ü.

Sei ν σ-endlich, wähle $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$

(betr. $\nu_n = 1\!\!1_{A_n} h\mu$) mit $\bigcup_n A_n = S$.

$$\int 1\!\!1_{A_n}(h-h')^+ d\mu = 0 = \int 1\!\!1_{A_n}(h-h')^- d\mu$$ mit

$n \to \infty$ und monotoner Konvergenz folgt die Beh. $\blacksquare$

Definition 3.19. Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : S \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar } : |f|^p \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \right\}$$

und für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ sei $\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$.

$$\|f\|_\infty := \inf \left\{ M \in \mathbb{R}_+ : |f| \leq M \ \mu\text{-f.ü.} \right\}$$

heißt *essentielles Supremum* (von f bezüglich μ), $\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{ f : S \to \overline{\mathbb{R}} \text{ m.b. } : \|f\|_\infty < \infty \}$.