Beispiel 1.19 (W'maße auf $\mathbb{R}^d$ und Verteilungsfunktionen)**.** μ W'maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $F_\mu : \mathbb{R}^d \to [0,1]$,

$$F_\mu(x) = \mu\big((-\infty, x]\big), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

ist die *Verteilungsfunktion* von μ.

μ ist durch F_μ festgelegt (nach Satz 1.18, denn $\sigma\big((-\infty, x] : x \in \mathbb{R}^d\big) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}^d\}$ ist $\cap$-stabil).

Proposition 1.20. *$\mathcal{G} \subset 2^\Omega$ Algebra, μ endlich additiv auf $\mathcal{G}$ mit $\mu(\varnothing) = 0$. Wir betrachten folgende Eigenschaften:*

i) *μ σ-additiv (auf $\mathcal{G}$)*

ii) *μ aufsteigend stetig:* $(A_n)_n \subset \mathcal{G}$ *mit* $A_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} A \in \mathcal{G} \Rightarrow \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)$

iii) *μ absteigend stetig:* $(A_n)_n \subset \mathcal{G}$ *mit* $A_n \underset{n\to\infty}{\searrow} A \in \mathcal{G}$ *und* $\mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)$

iv) *μ stetig in $\varnothing$:* $(A_n)_n \subset \mathcal{G}$ *mit* $A_n \underset{n\to\infty}{\searrow} \varnothing$ *und* $\mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Stets gilt i) $\iff$ ii), iii) $\iff$ iv), ii) $\Rightarrow$ iii).

Wenn $\mu(\Omega) < \infty$ so gilt auch iii) $\Rightarrow$ ii), d.h. dann sind i)–iv) äquivalent.

Zu i) $\iff$ ii) $\mathcal{G} \ni A_n \nearrow A \in \mathcal{G}$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ $(\in \mathcal{G})$ $(A_0 := \varnothing)$,

$\Rightarrow \dot\bigcup_{n=1}^N B_n = A_N$, wenn i) gilt $\mu(A) = \mu(\dot\bigcup_{n=1}^\infty B_n) \overset{\sigma\text{-add.}}{=} \underbrace{\sum_{n=1}^\infty \mu(B_n)}_{= \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^N \mu(B_n)}_{= \mu(A_N)}}$

Wenn ii) gilt und $A_1', A_2', \dots$ paarw. disj. sind

$\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n') \overset{\text{aufst. stet.}}{=} \lim_{N\to\infty} \underbrace{\mu(\bigcup_{n=1}^N A_n')}_{= \sum_{n=1}^N \mu(A_n')}$

Proposition 1.20. *$\mathscr{G} \subset 2^\Omega$ Algebra, μ endlich additiv auf $\mathscr{G}$ mit $\mu(\varnothing) = 0$. Wir betrachten folgende Eigenschaften:*

i) *μ σ-additiv (auf $\mathscr{G}$)*

ii) *μ aufsteigend stetig: $(A_n)_n \subset \mathscr{G}$ mit $A_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} A \in \mathscr{G} \Rightarrow \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)$*

iii) *μ absteigend stetig: $(A_n)_n \subset \mathscr{G}$ mit $A_n \underset{n\to\infty}{\searrow} A \in \mathscr{G}$ und $\mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)$*

iv) *μ stetig in $\varnothing$: $(A_n)_n \subset \mathscr{G}$ mit $A_n \underset{n\to\infty}{\searrow} \varnothing$ und $\mu(A_n) < \infty \Rightarrow \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*

Stets gilt i) $\Longleftrightarrow$ ii), iii) $\Longleftrightarrow$ iv), ii) $\Rightarrow$ iii).

Wenn $\mu(\Omega) < \infty$ so gilt auch iii) $\Rightarrow$ ii), d.h. dann sind i)–iv) äquivalent.

Falls $\mu(\Omega) < \infty$ ist: $A_n \nearrow A$, so gilt $A_n^c \searrow A^c$, dies zus. mit $\mu(A_n) = \mu(\Omega) - \mu(A_n^c)$, d.h. dann folgt ii) aus iii)

Zu „iii) $\Longleftarrow$ iv)": iii) $\Rightarrow$ iv) ✓,

es gelte iv), $A_n \searrow A \in \mathscr{G}$, $\mu(A_n) < \infty$. $B_n := \underbrace{A_n \setminus A}_{\in \mathscr{G}} \underset{n\to\infty}{\searrow} \varnothing$ und $\mu(B_n) < \infty$

Somit $\mu(A_n) = \underbrace{\mu(B_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + \mu(A)$, d.h. iii) gilt.

Zu „ii) $\Rightarrow$ iii)":

Sei $A_n \searrow A$, $\mu(A_n) < \infty$, setze $B_n := A_1 \setminus A_n \, (\in \mathscr{G}) \underset{n\to\infty}{\nearrow} A_1 \setminus A$

$\mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A_1) - \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A)$

Definition 1.21. Ein Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, wo $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra über Ω $(\neq \varnothing)$ und μ ein Maß auf $\mathscr{A}$ ist, heißt ein *Maßraum*. Wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, so heißt $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ (auch) ein *Wahrscheinlichkeitsraum*.

Satz 1.22 (Carathéodorys[3] Maßfortsetzungssatz)**.** *$\mathscr{A} \subset 2^{\Omega}$ Algebra, μ Prämaß auf $\mathscr{A}$. Dann gibt es ein Maß $\widetilde{\mu}$ auf $\sigma(\mathscr{A})$, das auf $\mathscr{A}$ mit μ übereinstimmt.*

Wenn μ σ-endlich ist, so ist $\widetilde{\mu}$ dadurch eindeutig bestimmt.

Definition 1.23. $\nu : 2^{\Omega} \to [0, \infty]$ mit $\nu(\varnothing) = 0$,

i) $\forall\, C_1 \subset C_2 \subset \Omega : \quad \nu(C_1) \leq \nu(C_2)$ („Monotonie")

ii) $\forall\, (C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2^{\Omega} : \quad \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n)$ („σ-Subadditivität")

heißt ein *äußeres Maß*.

[3] Constantin Carathéodory, 1873–1950

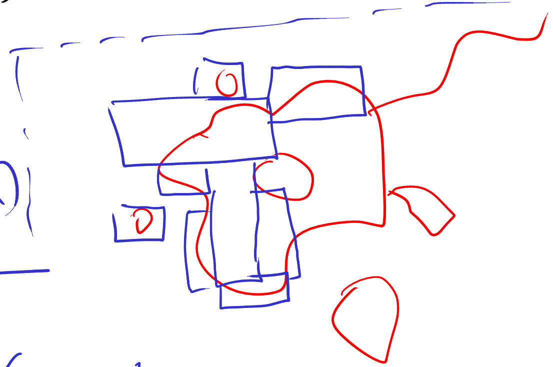
Lemma 1.24. *μ Prämaß auf Algebra $\mathscr{A}$.*

$$\mu^*(C) := \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \,:\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A} \text{ mit } \bigcup_n A_n \supset C\Big\}, \quad C \subset \Omega$$

ist ein äußeres Maß mit $\mu^*(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathscr{A}$.

$$(*) \quad \sum_{m=1}^{\infty}\mu(B_m) = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_{n,i})}_{\le \mu^*(C_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}}$$

mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt $\mu^*(C) \le \sum \mu^*(C_n)$



1) zeige: $\mu^* = \mu$ auf $\mathscr{A}$:

$\mu^*(A) \le \mu(A)$ (denn $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$)

seien $A_n \in \mathscr{A}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$, o.E. $A_n \subset A$ (sonst ersetze $A_n \rightsquigarrow A_n \cap A$),

gehe ggfs. über zu $B_n := A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \subset A_n$,

finde $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$, also $\mu^*(A) \ge \mu(A)$

2) Monotonie von μ^* ✓ ($C_1 \subset C_2$, so $\bigcup_n A_n \supset C_2$ $\Rightarrow \bigcup_n A_n \supset C_1$)

3) Sei $C_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $C := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Fixiere $\varepsilon > 0$. Zu C_n gibt es $A_{n,i} \in \mathscr{A}$ ($i \in \mathbb{N}$) mit $\mu^*(C_n) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_{n,i}) \le \mu^*(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ und $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n,i} \supset C_n$

Sei $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Aufzählung von $(A_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}}$: $C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n,i}$ und $(*)$

Definition 1.25. μ^* ein äußeres Maß. $A \subset \Omega$ heißt μ^**-messbar*, wenn gilt

$$\forall\, C \subset \Omega : \ \mu^*(C) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$$

(„$\leq$" gilt stets)

(wegen σ-Subaddivität von μ^* gilt dann tatsächlich $\mu^*(C) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$ für $C \subset \Omega$).

„Beweisfahrplan" für Satz 1.22:

μ^* aus Lemma 1.24, $\mathcal{A}_* := \{\mu^*\text{-messbare Teilmengen von } \Omega\}$

1) $\mathcal{A}_* \supset \mathcal{A}$

2) $\mathcal{A}_*$ ist Algebra

3) $\mathcal{A}_*$ ist Dynkin-System

$\left(\Big\} \Rightarrow \mathcal{A}_* \supset \sigma(\mathcal{A}) \right)$

4) μ_* ist σ-additiv auf $\mathcal{A}_*$.