$(S, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum

Definition 3.19. Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : S \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar } : |f|^p \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \right\}$$

und für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ sei $\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$.

$$\|f\|_\infty := \inf \left\{ M \in \mathbb{R}_+ : |f| \leq M \ \mu\text{-f.ü.} \right\}$$

heißt *essentielles Supremum* (von f bezüglich μ), $\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{ f : S \to \overline{\mathbb{R}} \text{ m.b. } : \|f\|_\infty < \infty \}$.

Beob.: $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist ein Vektorraum:

$f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $a, b \in \mathbb{R}$,

betr. $p < \infty$:

$|af + bg|^p \leq (|a||f| + |b||g|)^p \leq 2^p (|a|^p |f|^p + |b|^p |g|^p)$ ✓

d.h. $af + bg \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

$p = \infty$: $\|af + bg\|_\infty \leq |a| \|f\|_\infty + |b| \|g\|_\infty$ ✓

Satz 3.20 (Hölder-Ungleichung[5]). $p, q \in [1, \infty]$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$

Dann ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *mit*

$$\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(Für $p = q = 2$ *ist dies die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.)*

Integriere $(*)$ bzgl. μ

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha\beta} \int |fg| \, d\mu \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Bew.: $p = 1$, $q = \infty$: $|f \cdot g| \le |f| \cdot \|g\|_\infty$ μ-f.ü., d.h. Ungl. gilt ✓

Seien $p, q \in (1, \infty)$, falls $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ μ-f.ü.

analog, falls $\|g\|_q = 0$.

$\Rightarrow f \cdot g = 0$ μ-f.ü., d.h. Ungl. gilt als $0 = 0$ ✓

Sei $\alpha := \|f\|_p$, $\beta := \|g\|_q > 0$.

$a, b > 0$:

log ist konkav

$$\log(ab) = \log\left((a^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (b^q)^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q) \le \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot b \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

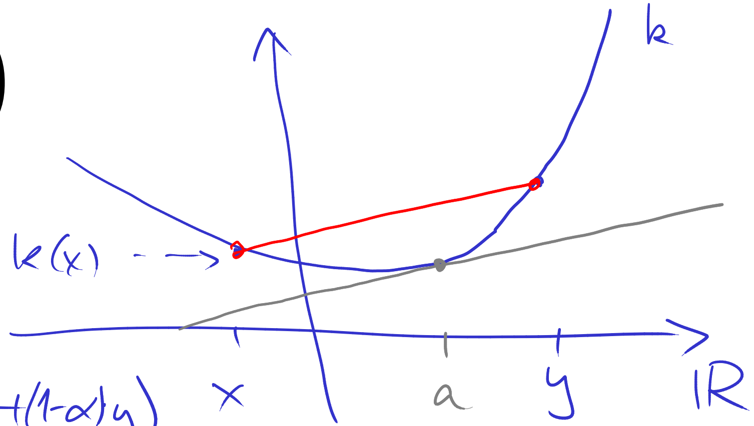
Damit

$$(*) \quad \frac{|f(x)|}{\alpha} \cdot \frac{|g(x)|}{\beta} \le \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\beta^q} \quad \forall x \in S.$$

[5] Otto Hölder, 1859–1937

Satz 3.21 (Jensen'sche Ungleichung[6]). $(S, \mathscr{A}, \mu)$ *W'raum*, $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *konvex*, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. *Dann ist* $\int k \circ f \, d\mu$ *wohldefiniert und es gilt*

$$\int k \circ f \, d\mu \geq k\Big(\int f \, d\mu\Big)$$



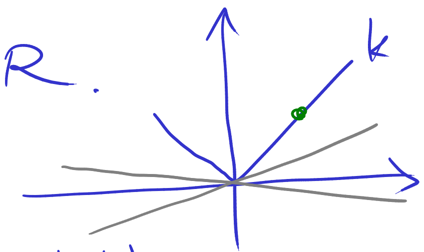
Erinnerung:

k konvex $\iff \forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \alpha \in [0,1]$:

$$\alpha k(x) + (1-\alpha) k(y) \geq k(\alpha x + (1-\alpha) y).$$

Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es $m = m(a) \in \mathbb{R}$ mit

$(*)$ $\quad k(z) \geq k(a) + m(z-a)$ für jedes $z \in \mathbb{R}$.



$$(k \circ f)^- \leq \big(k(a) + m(f-a)\big)^- \leq |k(a)| + |m|\,(|f| + |a|)$$

$$\Rightarrow (k \circ f)^- \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

$(*)$ liefert
$$\int k(f(x))\,\mu(dx) \geq k(a) + \underbrace{m \int f(x)\,\mu(dx) - m a}_{= m\left(\int f \, d\mu - a\right)}$$

wähle $a = \int f \, d\mu$

[6] nach Johan Ludvig Jensen, 1859–1925 benannt

Definition 3.22 (Konvergenzarten)**.** $(S, \mathscr{A}, \mu)$ Maßraum, $f,\ f_1, f_2, \dots : S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b.

i) $f_n \to f$ μ-fast überall (abgekürzt μ-f.ü.; wenn $\mu(S) = 1$, so sagt man auch „fast sicher", abgekürzt f.s.), wenn

$$\{x : f_n(x) \not\to f(x)\} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)} \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} \{|f_m - f| > \varepsilon\}$$

eine μ-Nullmenge ist.

ii) $f_n \to f$ im Maß μ $:\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0 :\ \mu\big(\{|f_n - f| > \varepsilon\}\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
(man sagt auch „μ-stochastisch" und schreibt $f_n \to f$ (μ-)stoch.)

iii) $1 \leq p \leq \infty$, $f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^p(\mu)$. $f_n \to f$ im p-ten Mittel (auch „in $\mathcal{L}^p(\mu)$", geschrieben $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} f$) $:\Leftrightarrow$ $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Bem.: In der Literatur auch üblich:

$\forall\, \varepsilon > 0$ und $\forall\, A \in \mathscr{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt

$\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\} \cap A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Bemerkung 3.23. *i)* $\mu(S) < \infty$, $f_n \to f$ μ-f.ü. $\implies$ $f_n \to f$ im Maß (bzgl. μ) ✓

ii) $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} f$ für ein $p \in [1,\infty]$ $\implies$ $f_n \to f$ im Maß ✓

iii) Die Limiten sind jeweils μ-f.ü. eindeutig bestimmt. ✓

Bew. i) $A_{n,\varepsilon} = \{\sup_{m \geq n} |f_m - f| > \varepsilon\} \supset A_{n+1,\varepsilon}$,

$(\infty >)\ \mu(A_{n,\varepsilon}) \searrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,\varepsilon}\right) = \mu(\{f_n \not\to f\}) = 0$,

Somit $\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \mu(A_{n,\varepsilon}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ii) Sei $1 \leq p < \infty$:

$$\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = \mu(\{|f_n - f|^p > \varepsilon^p\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$p = \infty$: für n so groß, dass $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ ist $\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0$

iii) Sei $f_n \to f$ im Maß und $f_n \to g$ im Maß

$$\mu(\{|f - g| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon/2\}) + \mu(\{|f_n - g| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Bemerkung 3.23. *i)* $\mu(S) < \infty$, $f_n \to f$ μ-f.ü. $\implies$ $f_n \to f$ im Maß

ii) $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} f$ für ein $p \in [1, \infty]$ $\implies$ $f_n \to f$ im Maß

iii) Die Limiten sind jeweils μ-f.ü. eindeutig bestimmt.

(Gegen-) Beispiel:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.a. ZVn, $X_n \sim \mathrm{Ber}_{1/n}$ (d.h. $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0)$),

so gilt

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch.}} 0$$

(denn $\{|X_n - 0| > \varepsilon\} = \{X_n = 1\}$ und $\mathbb{P}(X_n = 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ für $\varepsilon < 1$)

mit Borel-Cantelli gilt (denn $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$)

$\mathbb{P}(\{X_n = 1 \text{ für unendlich viele } n\}) = 1$,

daher gilt nicht, dass X_n f.s. konvergiert.

beachte: dann ist

$$\mu(\{|f_m - f_n| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{|f_m - g| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}) + \mu(\{|f_n - g| > \tfrac{\varepsilon}{2}\}) \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

Lemma 3.24. *$f_1, f_2, \ldots : S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b. mit*

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu\big(\{|f_m - f_n| > \varepsilon\}\big) = 0 \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0.$$

Dann gibt es $n_k \underset{k\to\infty}{\nearrow} \infty$, $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b. mit $f_{n_k} \to f$ μ-f.ü. für $k \to \infty$.

Insbesondere: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ im Maß μ, so gibt es eine Teilfolge mit $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} g$ μ-f.ü.

Bew.: Wähle $n_1 < n_2 < \ldots$, so dass für $m \geq n_k$ gilt

$$\mu(\{|f_m - f_{n_k}| > 2^{-k}\}) \leq 2^{-k},$$

$A_k := \{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}\}$ erfüllt $\mu(A_k) \leq 2^{-k}$,

mit Borel-Cantelli $\mu(\limsup_{k\to\infty} A_k) = 0$.

Für $x \in (\limsup_k A_k)^c$ ist $|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq 2^{-k}$ von gewissen Index ab

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty,$$

d.h. $f_{n_m} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{m-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ konvergiert μ-f.ü. $\square$

Satz 3.25. $1 \le p \le \infty$, $f_1, f_2, \ldots$ *Cauchy-Folge in* $\mathcal{L}^p(\mu)$, *d.h.* $\lim_{m,n\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$. *Dann gibt es ein* $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *mit* $f_n \to f$ *in* $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Bedr. $1 \le p < \infty$.

Mit Markov-Ungl. erfüllt f_n die Voraussetzungen von Lemma 3.24,

d.h. $\exists\, n_k \nearrow \infty$ und $f: S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b. mit $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f$ μ-f.ü.

$$\int |f_m - f|^p \, d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int |f_m - f_{n_k}|^p \, d\mu$$

$$\le \sup_{n \ge m} \int |f_m - f_n|^p \, d\mu \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Zudem ist $f = f_m + f - f_m \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

$p = \infty$: $\|f_n - f_m\|_\infty < 2^{-k}$ für $n, m \ge N_0$,

$|f_n(x) - f_m| < 2^{-k}$ für $x \notin A_k$, $\mu(A_k) = 0$

$\lrcorner$

Satz 3.26 (Minkowski-Ungleichung[7]). $1 \leq p \leq \infty$, $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, *so gilt*

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

[7] Hermann Minkowski, 1864–1909

Beobachtung 3.27. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\mu) = \left\{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\right\}$ mit $[f] = \{g : g = f\ \mu\text{-f.ü.}\}$ ein Banachraum, $L^2(\mu)$ ist mit Skalarprodukt $\langle [f], [g] \rangle := \int fg\, d\mu$ ein Hilbertraum.

Bemerkung 3.28. Sei $\mu(S) < \infty$, $1 \leq r < s \leq \infty$. Es gilt $\mathcal{L}^s(\mu) \subset \mathcal{L}^r(\mu)$ und die Einbettung $\mathcal{L}^s(\mu) \ni f \mapsto f \in \mathcal{L}^r(\mu)$ ist stetig.