Definition 1.25. μ^* ein äußeres Maß. $A \subset \Omega$ heißt μ^*-*messbar*, wenn gilt

$$\forall\, C \subset \Omega : \ \mu^*(C) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$$

(„$\leq$" gilt stets)

(wegen σ-Subaddivität von μ^* gilt dann tatsächlich $\mu^*(C) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$ für $C \subset \Omega$).

„Beweisfahrplan" für Satz 1.22:

μ^* aus Lemma 1.24, $\mathcal{A}_* := \{\mu^*\text{-messbare Teilmengen von } \Omega\}$

1) $\mathcal{A}_* \supset \mathcal{A}$ ✓

2) $\mathcal{A}_*$ ist Algebra ✓

3) $\mathcal{A}_*$ ist Dynkin-System ✓ $\left(\} \Rightarrow \mathcal{A}_* \supset \sigma(\mathcal{A}) \right)$ ✓

4) μ_* ist σ-additiv auf $\mathcal{A}_*$.

$$\mu^*(C) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \ A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \text{ und } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset C \right\}$$

$$A \in \mathcal{A}_* :\Leftrightarrow \left(\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \ \forall\, C \subset \Omega \right)$$

$$\mu^*(C) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \quad A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \text{ und } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset C \right\}$$ 25a

$$A \in \mathcal{A}_* :\Leftrightarrow \left(\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \quad \forall C \subset \Omega \right)$$

1) Zeige $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Sei $A \in \mathcal{A}$, $C \subset \Omega$ beliebig,

zu $\varepsilon > 0$ gibt es $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ mit $\mu^*(C) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(C) + \varepsilon$,

$$A \cap C \subset A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\underbrace{A \cap A_n}_{\in \mathcal{A}}),$$

$$A^c \cap C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\underbrace{A^c \cap A_n}_{\in \mathcal{A}})$$

$$\mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(C) + \varepsilon$$

mit $\varepsilon \downarrow 0$ folgt

$A \in \mathcal{A}_*$.

$$\mu^*(C) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \quad A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \text{ und } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset C \right\}$$ 25b

$$A \in \mathcal{A}_* :\Leftrightarrow \left(\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \quad \forall C \subset \Omega \right)$$

2) Zeige $\mathcal{A}_*$ ist Algebra. $\emptyset \in \mathcal{A}_* \checkmark$. $A \in \mathcal{A}^* \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}^*$

(Symmetrie der Def.) $\checkmark$

Seien $A, B \in \mathcal{A}_*$.

Für $C \subset \Omega$: $\mu^*(C) = \mu^*(C \cap B) + \mu^*(C \cap B^c)$ (1.1)

$$= \mu^*(A \cap B \cap C) + \mu^*(A^c \cap B \cap C) + \mu^*(A \cap B^c \cap C) + \mu^*(A^c \cap B^c \cap C)$$

ersetze $C \rightsquigarrow C \cap (A \cup B)$

$$\mu^*((A \cup B) \cap C) = \mu^*(A \cap B \cap C) + \mu^*(A^c \cap B \cap C) + \mu^*(A \cap B^c \cap C) + \underbrace{\mu^*(\emptyset)}_{=0}$$ (1.2)

(1.1) & (1.2) $\Rightarrow$

$$\mu^*(C) = \mu^*((A \cup B) \cap C) + \mu^*(\underbrace{A^c \cap B^c}_{=(A \cup B)^c} \cap C)$$

$$\Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{A}_*$$

somit folgt $\mathcal{A}_*$ ist Algebra.

$$\mu^*(C) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \quad A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \text{ und } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supset C \right\}$$ 25c

$$A \in \mathcal{A}_* :\Leftrightarrow \left(\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \quad \forall C \subset \Omega \right)$$

3) zeige: $\mathcal{A}_*$ ist Dynkin-Syst. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_*$ paarw. disj., $A := \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n$

A_1, A_2 mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\mu^*((A_1 \dot{\cup} A_2) \cap C) = \mu^*(\underbrace{A_1^c \cap A_2}_{= A_2} \cap C) + \mu^*(\underbrace{A_1 \cap A_2^c}_{= A_1} \cap C)$$

induktiv folgt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu^*((\underbrace{\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i}_{\in \mathcal{A}_*}) \cap C) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i \cap C)$$

damit

$$\mu^*(C) = \mu^*((\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i) \cap C) + \mu^*(\underbrace{(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i)^c}_{\supset A^c \cap C} \cap C)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$$

mit $n \to \infty$:

$$\underbrace{\mu^*(C)}_{\shortparallel} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$$

$$\mu^*(\underbrace{\dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} (A_i \cap C)}_{= A \cap C} \cup (A^c \cap C)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$$

Insgesamt: $\quad (A_1, A_2, \ldots$ paarw. disjunkt$)$ $\quad$ 25d

$$\mu^*(C) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i \cap C) + \mu^*(A^c \cap C) \qquad (1.5)$$

andererseits:

$$\mu^*(A \cap C) = \mu^*\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} (A_i \cap C)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_*(A_i \cap C)$$

$$\mu^*(C) \leq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C$$

$$\Rightarrow \mu^*(C) = \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A^c \cap C)$$

also $A \left(= \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right) \in \mathcal{A}_*$

4) zeige μ^* ist σ-additiv auf $\mathcal{A}_*$:

seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_*$ paarw. disj., setze $A := \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i$ für C in (1.5) ein:

$$\mu^*\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(\underbrace{A_i \cap A}_{= A_i}) + \mu^*(\underbrace{A^c \cap A}_{= 0}) \quad \checkmark$$

$$\mu^*(C) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \text{ und } \bigcup_{n=1} A_n \supset C \right\}$$

$$A \in \mathcal{A}_* :\Leftrightarrow \left(\mu^*(C) \geq \mu^*(C \cap A) + \mu^*(C \cap A^c) \;\; \forall C \subset \Omega \right)$$

Existenz: $\tilde{\mu} := \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ ✓ $\left(\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_* \right)$

Eindeutigkeit:

Seien $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ Maße mit den geforderten Eigenschaften, insbes. $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ auf $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist $\cap$-stabil, wähle $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $A_n \in \mathcal{A}$, mit $\mu(A_n) < \infty$ für jedes n und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$

$\underset{\text{Satz 1.18}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$.

$\square$

Erinnerung 1.26. Eine *Verteilungsfunktion* (einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$) ist eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, die nicht-fallend und rechtsstetig ist mit $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Satz 1.27. *Zu jeder Verteilungsfunktion F gehört genau ein W'maß μ_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit*

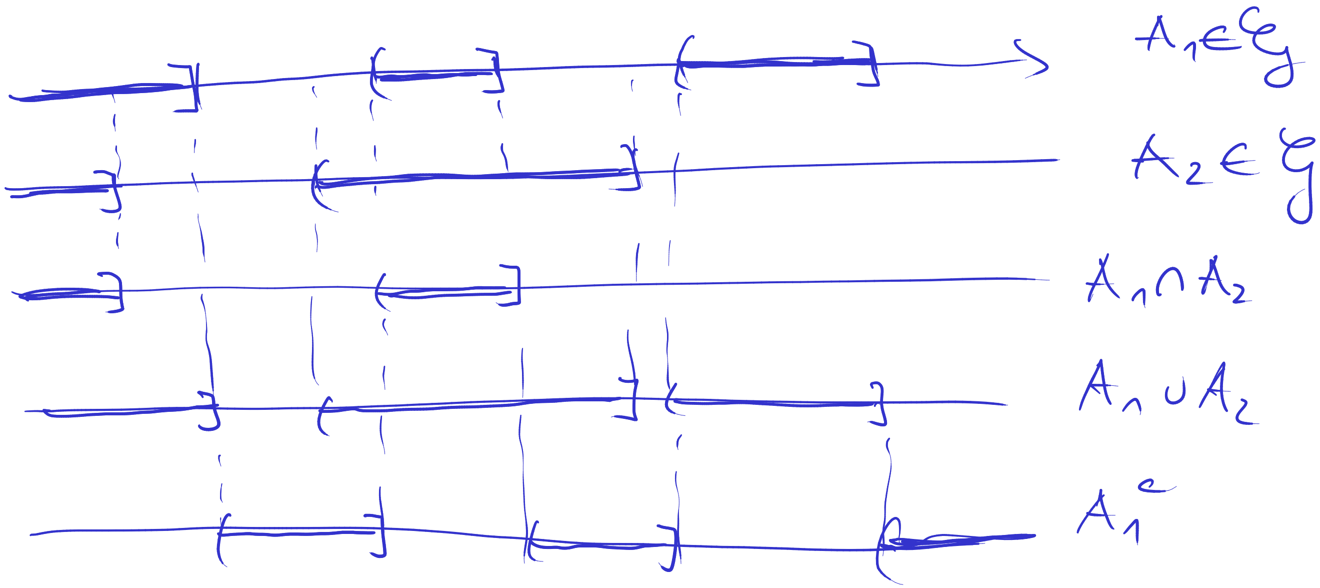
$$\mu_F\big((-\infty, x]\big) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bew.: $\mathcal{J}_1 := \{(a,b] : -\infty < a < b < \infty\}$, $\mathcal{J}_2 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$,

$\mathcal{J}_3 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{G} := \{ \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} I_j : n \in \mathbb{N}, I_j \in \mathcal{J} \}$ $\quad (\mathcal{J} := \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3)$,

$\mathcal{G}$ <u>ist</u> eine Algebra.



26a

Bew.: $\mathcal{J}_1 := \{(a,b] : -\infty < a < b < \infty\}$, $\mathcal{J}_2 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$,
$\mathcal{J}_3 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{G} := \{ \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} I_j : n \in \mathbb{N},\ I_j \in \mathcal{J} \}$ $\quad (\mathcal{J} := \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3)$,

$A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k$ mit $I_k = (a_k, b_k]$ $(\cap \mathbb{R})$ $, -\infty \leq a_k < b_k \leq +\infty$

setze $\mu(A) := \sum_{k=1}^{n} \big(F(b_k) - F(a_k)\big)$ $\quad$ (mit $F(+\infty) := 1$, $F(-\infty) :=$

μ ist wohldefiniert. (z.B. $I_k = (a_k, c_k] \cup (c_k, b_k]$ mit $a_k < c_k < b_k$,
dann $F(c_k) - F(a_k) + F(b_k) - F(c_k)$
$= F(b_k) - F(a_k)$)

und μ ist (endl.) additiv. ✓

$A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k$ mit $I_k = (a_k, b_k]$ $(\cap \mathbb{R})$

Setze $\mu(A) := \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k))$ (beachte $\mu(\mathbb{R}) = 1$)

zeige: μ ist $\emptyset$-stetig auf $\mathcal{G}$ ($\overset{\text{Prop. 1.20}}{\Longrightarrow}$ μ σ-additiv auf $\mathcal{G}$)

Ziel: Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \varepsilon > 0$,
dann gilt: $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$.

(Zwischen-Ziel: $I \in \mathcal{J}$, $\delta > 0$, dann gibt es $-\infty < u < v < \infty$ mit $[u,v] \subset I$, $\mu((u,v]) \geq \mu(I) - \delta$.

für $I = (a,b]$: wähle $v = b$, wegen $\lim_{u \searrow a} F(u) = F(a)$ ist geeign. Wahl von u möglich,

für $I = (-\infty, b]$: wähle $v = b$, wegen $\lim_{u \to -\infty} F(u) = 0 = F(-\infty)$, ist geeign. Wahl mögl.,

analog für $I = (a, \infty)$.)