Herzlich willkommen zur

Vorlesung Stochastik I, SS 2021

Matthias Birkner

Kapitel 7

Martingale (in diskreter Zeit)

Martingale[1] sind (u.a.) eine mathematische Formalisierung des Begriffs des fairen Spiels und der Vorstellung, dass man dabei nicht auf systematische Weise gewinnen kann.

Beispiel 7.1. Betrachte eine faire Münzwurffolge, d.h. seien $W_1, W_2, \ldots$ unabhängig und identisch uniform verteilt auf $\{K, Z\}$. Sei

$$R := \min\Big\{k \in \mathbb{N} \,:\, (W_k, W_{k+1}, W_{k+2}, W_{k+3}) = (Z, K, Z, K)\Big\}.$$

Was ist

$$\mathbb{E}[R] = ?$$

[1]Zur farbigen Geschichte des Begriffs Martingal siehe beispielsweise den Artikel von Roger Mansuy, The origins of the word "martingale", Electronic Journal for History of Probability and Statistics, Vol. 5 no. 1, (2009), `http://www.jehps.net`.

$W_1, W_2, \ldots$ u.i.v., uniform auf $\{K, Z\}$.

$$R := \min\left\{k \in \mathbb{N} : (W_k, W_{k+1}, W_{k+2}, W_{k+3}) = (Z, K, Z, K)\right\}$$

Spieler i : - Setzt in Runde i Euro auf „Z", falls Gewinn:

- setzt in Runde $i+1$ 2 € auf „K" (sonst: Aufgeben), falls Gewinn:
- — " — $i+2$ 4 € auf „Z" (— " —), falls Gewinn:
- — " — $i+3$ 8 € auf „K", falls: gehe mit 16 € nach Hause

Sei $X_{i,n}$ = Gewinn von Spieler i nach Runde n.

$X_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$ der Gesamtgewinn der Spieler nach Runde n.

„Fairness" $\Rightarrow$ $0 = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_{R+3}]$

Zum Zeitpunkt $R+3$:

Spieler R hat 15 € Gewinn, Spieler $R+2$ hat 3 € Gewinn,

die übrigen $R+1$ Spieler haben -1 € Gewinn

$W_1, W_2, \ldots$ u.i.v., uniform auf $\{K, Z\}$.

$$R := \min\left\{k \in \mathbb{N} : (W_k, W_{k+1}, W_{k+2}, W_{k+3}) = (Z, K, Z, K)\right\}$$

Sei $X_{i,n}$ = Gewinn von Spieler i nach Runde n.

$X_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$ der Gesamtgewinn der Spieler nach Runde n.

„Fairness" $\Rightarrow$ $0 = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_{R+3}]$

Zum Zeitpunkt $R+3$:

Spieler R hat 15 € Gewinn, Spieler $R+2$ hat 3 € Gewinn, die übrigen $R+1$ Spieler haben -1 € Gewinn:

$$X_{R+3} = 15 + 3 + (-1)(R+1) = 17 - R,$$

also $\mathbb{E}[17 - R] = 0 \iff \mathbb{E}[R] = 17$.

7.1 Grundlegendes

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 7.2. Eine Familie $(\mathscr{F}_n)_{n=0,1,\ldots}$ von (Teil-) σ-Algebren mit

$$\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \ldots \subset \mathscr{F}$$

heißt *Filtration*. $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n=0,1,\ldots}, \mathbb{P})$ heißt filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

Bemerkung 7.3. i) Interpretation: $\mathscr{F}_n$ enthält diejenigen Ereignisse, die bis zum Zeitpunkt n entschieden sind.

ii) Ist $X = (X_n)_{n=0,1,\ldots}$ eine Familie von Zufallsvariablen (ein sog. stochastischer Prozess), so ist

$$\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots X_n), \; n \in \mathbb{N}_0$$

eine Filtration (die von X erzeugte Filtration).

Definition 7.4. Es sei $X = (X_n)_n$ ein stochastischer Prozess und $(\mathscr{F}_n)_n$ eine Filtration. X heißt *adaptiert* (an $(\mathscr{F}_n)_n$), wenn X_n $\mathscr{F}_n$-messbar ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Definition 7.5. Es sei $X = (X_n)_n$ ein (reellwertiger) stochastischer Prozess und $(\mathscr{F}_n)_n$ eine Filtration. X heißt ein *Martingal* (bzgl. $(\mathscr{F}_n)_n$ unter $\mathbb{P}$), wenn gilt:

i) X ist adaptiert (an $(\mathscr{F}_n)_n$).

ii) $X_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

iii) $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] = X_n$ f.s. für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

Falls in iii) $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] \geq X_n$ gilt, so heißt X ein *Submartingal*. Falls $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n] \leq X_n$ gilt, so heißt X ein *Supermartingal*.

Bemerkung 7.6. Induktiv folgt für ein Martingal X

$$\mathbb{E}[X_n \mid \mathscr{F}_m] = X_m \text{ f.s. für alle } 0 \leq m \leq n.$$

$(\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_{m+1})$

(bzw. „≥“ für ein Sub- und „≤“ für ein Supermartingal.

Turmeigenschaft d. bed. Erw.

$n = m+1$ ✓

$$\mathbb{E}[X_{m+2} \mid \mathcal{F}_m] = \mathbb{E}\big[\underbrace{\mathbb{E}[X_{m+2} \mid \mathcal{F}_{m+1}]}_{= X_{m+1}} \mid \mathcal{F}_m\big]$$

$$= X_m \quad (\text{f.s.})$$

... ✓

Beispiel 7.7. i) Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige, reelle Zufallsvariablen mit $Y_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $S_0 := 0$ und $S_n := Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = S_{n-1} + Y_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(S_n)_n$ ein Martingal bezgl. $(\mathscr{F}_n)_n$ mit $\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \ldots S_n) = \sigma(Y_1, \ldots Y_n)$, $n \in \mathbb{N}$ (und $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$).

$S = (S_n)_n$ <u>ist</u> adaptiert ✓ $\quad S_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ ✓

Y_{n+1} u.a. von $\mathcal{F}_n$

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \underbrace{\mathbb{E}[S_n \mid \mathcal{F}_n]}_{= S_n} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]}_{= \mathbb{E}[Y_{n+1}] = 0}$$

$$= S_n \ (f.s.)$$

S_n $\mathcal{F}_n$-m.b. $\longrightarrow$

ii) Pólyas Urne: Eine Urne enthalte anfangs $s > 0$ schwarze und $w > 0$ weiße Kugeln. Ziehe jeweils eine Kugel rein zufällig und lege sie zusammen mit einer neuen Kugel der selben Farbe zurück. Sei X_n die Anzahl weißer Kugeln nach n Zügen und $A_n := \frac{X_n}{s+w+n}$ der Anteil weißer Kugeln in der Urne. Dann ist $(A_n)_n$ ein Martingal bzgl. $\mathscr{F}_n = \sigma(A_0, \ldots, A_n)$.

auf dem Ereignis $\{X_n = k\}$ $(\in \mathcal{F}_n)$, $(k \in \{w, w+1, \ldots, w+n\})$, dann $A_n = \frac{k}{s+w+n}$

$$\mathbb{E}[A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \frac{k+1}{s+w+n+1} \cdot \frac{k}{s+w+n} + \frac{k}{s+w+n+1} \cdot \frac{s+w+n-k}{s+w+n}$$

$$= \frac{k}{s+w+n} \cdot \frac{\cancel{k}+1+s+w+n-\cancel{k}}{s+w+n+1} = \frac{k}{s+w+n} = A_n$$

$\lrcorner$

Definition 7.8. Sei $(\mathscr{F}_n)_n$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(C_n)_n$ heißt *previsibel* (bzgl. $(\mathscr{F}_n)_n$), auch vorhersagbar, wenn C_n $\mathscr{F}_{n-1}$-messbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ (C_0 spielt hier keine Rolle).

Definition 7.9. Sei $(X_n)_n$ adaptiert und $(C_n)_n$ previsibel bzgl. $(\mathscr{F}_n)_n$. Setze

$$(C \bullet X)_0 := 0, \quad (C \bullet X)_n := \sum_{m=1}^{n} C_m(X_m - X_{m-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.1}$$

Der Prozess $C \bullet X = ((C \bullet X)_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt *(diskretes) stochastisches Integral* von C bezüglich X. $C \bullet X$ ist (offenbar) adaptiert.

Spielinterpretation: $C \bullet X$ ist ein akkumulierter Gewinnprozess für einen Spieler, der in der m-ten Runde jeweils C_m-fachen Einsatz setzt.

Lemma 7.10. *Es sei $(X_n)_n$ ein Martingal und $(C_n)_n$ ein previsibler Prozess bzgl. $(\mathscr{F}_n)_n$. Es gelte mindestens eine der folgenden drei Bedingungen*

i) $(C_n)_n$ ist lokal beschränkt, d.h. es gibt Konstanten c_n mit $|C_n| \le c_n$ f.s. für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) $(X_n - X_{n-1})_n$ ist lokal beschränkt und $C_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

d.h. $|X_n - X_{n-1}| \le c_n$ f.s. für eine Konst. c_n, $n \in \mathbb{N}$

iii) $X_n, C_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist $C \bullet X$ ein Martingal. Ist $C_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und X ein Sub- bzw. Supermartingal, so auch $C \bullet X$.

$$(C \bullet X)_n = \sum_{m=1}^{n} \underbrace{C_m (X_m - X_{m-1})}_{\mathcal{F}_m\text{-m.b.}} \quad \text{ist } \mathcal{F}_n\text{-m.b.} \checkmark$$

i) $\Rightarrow$ $C_n \cdot (X_n - X_{n-1}) \in \mathcal{L}^1$, iii) $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[|C_n (X_n - X_{n-1})|]$

ii) $\Rightarrow$ Cauchy-Schwarz $\longrightarrow$ $\le \sqrt{\mathbb{E}[C_n^2]} \cdot \sqrt{\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2]} < \infty$

d.h. $(C \bullet X)_n \in \mathcal{L}^1$ $\checkmark$

bed. Erw. linear

$$\mathbb{E}[(C \bullet X)_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \underbrace{\mathbb{E}[C_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n]}_{= C_{n+1}(\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n]) = C_{n+1}(X_n - X_n) = 0 \text{ (f.s.)}} + \underbrace{\mathbb{E}[(C \bullet X)_n \mid \mathcal{F}_n]}_{= (C \bullet X)_n \text{ f.s.}}$$

$\dashv$

Definition 7.11. Sei $(\mathscr{F}_n)_n$ eine Filtration. Eine Zufallsvariable T mit Werten in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt eine ($(\mathscr{F}_n)_n$-)*Stoppzeit*, wenn $\{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Für eine Stoppzeit T *ist*

$$\mathscr{F}_T := \{A \in \mathscr{F} \mid A \cap \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

eine σ-Algebra, sie heißt die *(σ-Algebra der) T-Vergangenheit*.

Interpretation: $\mathscr{F}_T$ enthält diejenigen Ereignisse, die sich zu dem (zufälligen) Zeitpunkt T entscheiden lassen.

Sei $A \in \mathcal{F}_T \Rightarrow A^c \cap \{T \leq n\} = \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \setminus (\underbrace{\{T \leq n\} \cap A}_{\in \mathcal{F}_n}) \in \mathcal{F}_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$

$\Downarrow$

$A^c \in \mathcal{F}_T$

Bemerkung 7.12. T ist genau dann eine Stoppzeit, wenn $\{T = n\} \in \mathscr{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Falls $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \ (\forall n)$

$\Rightarrow \{T \leq n\} = \bigcup_{j=0}^{n} \underbrace{\{T = j\}}_{\in \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

Falls $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \ (\forall n)$:

$\{T = n\} = \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T \leq n-1\}^c}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}_T$

$\Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap \{T \leq n\}$

$= \bigcup_{j=1}^{\infty} (\underbrace{A_j \cap \{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n}) \in \mathcal{F}_n$

Beispiel 7.13. i) Jede Konstante t_0 ist eine Stoppzeit.

$$\{t_0 \le n\} = \begin{cases} \Omega \\ \emptyset \end{cases} \text{oder} \quad (\in \mathcal{F}_n)$$

ii) Es sei $(X_n)_n$ ein adaptierter stochastischer Prozess mit Werten in $(E, \mathscr{B})$ und $K \in \mathscr{B}$. Dann ist

$$T := \inf \{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_n \in K\}$$

(mit Interpretation $\inf \varnothing = \infty$) eine Stoppzeit.

Denn: $\{T \le n\} = \bigcup_{m=0}^{n} \{\underbrace{X_m \in K}_{\in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n}\} \in \mathcal{F}_n$

Bemerkung. $L := \sup \{n \in \mathbb{N}_0 \mid X_n \in K\}$ ist im Allgemeinen keine Stoppzeit.

Lemma 7.14. *Sind σ, τ Stoppzeiten, so sind auch $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$ und $\sigma + \tau$ Stoppzeiten.*

Bemerkung. $\sigma - \tau$ ist im Allgemeinen keine Stoppzeit.