Satz 3.26 (Minkowski-Ungleichung[7]). *$1 \le p \le \infty$, $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, so gilt*

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

Bew.: Fall $p = 1$: $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in S$ ✓

analog $p = \infty$: ✓ Falls $\int |f+g|^p \, d\mu = 0$ ✓

Betr. $1 < p < \infty$, sei $\int |f+g|^p \, d\mu \in (0, \infty)$.

Setze $q := \frac{p}{p-1}$ (damit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$)

$$\|f+g\|_p^p = \int \underbrace{|f+g|^p}_{\underbrace{|f+g| \cdot |f+g|^{p-1}}_{\le |f| + |g|}} d\mu \le \int |f| \, |f+g|^{p-1} d\mu + \int |g| \, |f+g|^{p-1} d\mu$$

Hölder-Ungl.

$$\le \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int |f+g|^{q(p-1)} d\mu\right)^{1/q}$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \underbrace{\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}}_{= \|f+g\|_p^{p-1}}$$

[7] Hermann Minkowski, 1864–1909

Beobachtung 3.27. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\mu) = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$ mit $[f] = \{g : g = f\ \mu\text{-f.ü.}\}$ ein Banachraum, $L^2(\mu)$ ist mit Skalarprodukt $\langle [f], [g] \rangle := \int f g \, d\mu$ ein Hilbertraum.

Bemerkung 3.28. Sei $\mu(S) < \infty$, $1 \leq r < s \leq \infty$. Es gilt $\mathcal{L}^s(\mu) \subset \mathcal{L}^r(\mu)$ und die Einbettung $\mathcal{L}^s(\mu) \ni f \mapsto f \in \mathcal{L}^r(\mu)$ ist stetig.

Bew.: Fall $s = \infty$: Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, $1 \leq r < \infty$, so ist

$$\|f\|_r = \left(\int |f|^r d\mu\right)^{1/r} \leq \left(\int (\|f\|_\infty)^r d\mu\right)^{1/r} = \|f\|_\infty \cdot (\mu(S))^{1/r}$$

Fall $s < \infty$: Sei $f \in \mathcal{L}^s(\mu)$, $1 \leq r < s$, setze $p := \frac{s}{r}$, $q := \frac{1}{1-1/p} = \frac{s}{s-r}$

(also $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\|f\|_r = \left(\int \underbrace{|f|^r}_{\cdot 1} d\mu\right)^{1/r} \leq \left(\left(\int 1^q d\mu\right)^{1/q} \cdot \left(\underbrace{\int (|f|^r)^p d\mu}_{\int |f|^s d\mu}\right)^{1/p}\right)^{1/r}$$

$$= (\mu(S))^{\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{r}} \cdot \|f\|_s$$

3.1 Gleichgradige Integrierbarkeit

Definition 3.29. Sei $1 \leq p < \infty$. Ein Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ heißt *gleichgradig p-integrierbar* (für $p = 1$ meist einfach *gleichgradig integrierbar*), wenn gilt

$$\inf_{g \in \mathcal{L}^p(\mu),\, g \geq 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f|>g\}} |f|^p \, d\mu = 0$$

Bemerkung 3.30. $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $|\mathcal{F}| < \infty$ ist gleichgradig p-integrierbar.

Sei $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$,

wähle $g = |f_1| + |f_2| + \dots + |f_n|$ in ,

So ist $\sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f|>g\}} |f|^p \, d\mu = 0$

Satz 3.31. *Sei* $1 \le p < \infty$, $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ *m.b. Dann sind äquivalent*

(„Konvergenzsatz von Vitali")

i) $f_n \to f$ *in* $\mathcal{L}^p(\mu)$

ii) $f_n \to f$ *im Maß* μ *und* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *ist gleichgradig p-integrierbar.*

Bew.: „i) $\Rightarrow$ ii)" $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(\mu)} f \Longrightarrow f_n \to f$ im Maß μ (Bem. 3.23) ✓

$h := 2|f|$ $(\in \mathcal{L}^p(\mu))$, für jede Teilfolge $n_1 < n_2 < \dots \nearrow \infty$ gibt es eine Teilteilfolge $(n'_k)_k$ mit

$$\underbrace{|f_{n'_k}|^p \mathbb{1}_{\{|f_{n'_k}| \le h\}}}_{\le |h|^p} \xrightarrow[k\to\infty]{} |f|^p \quad \mu\text{-fast überall}$$

dom. Konv. $\Longrightarrow$

$$\int_{\{|f_{n'_k}| \le h\}} |f_{n'_k}|^p \, d\mu \xrightarrow[k\to\infty]{} \int |f|^p \, d\mu \quad \text{und} \quad \text{(Satz v.d. dom. Konv.)}$$

$$\int_{\{|f_{n'_k}| > h\}} |f_{n'_k}|^p \, d\mu \le \underbrace{2^p \int_{\{\dots\}} |f_{n'_k} - f|^p \, d\mu}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \text{ („Vor")}} + \underbrace{2^p \int_{\{|f_{n'_k}| > h\}} |f|^p \, d\mu}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0}$$

Satz 3.31. *Sei* $1 \leq p < \infty$, $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ *m.b. Dann sind äquivalent*

i) $f_n \to f$ *in* $\mathcal{L}^p(\mu)$

ii) $f_n \to f$ *im Maß* μ *und* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *ist gleichgradig p-integrierbar.*

(„i) ⇒ ii)"):

Somit $\displaystyle\int_{\{|f_n|>h\}} |f_n|^p \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es n_0 mit $\displaystyle\int_{\{|f_n|>h\}} |f_n|^p \, d\mu \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$,

setze $g := h + |f_1| + |f_2| + \dots + |f_{n_0-1}|$,

dies leistet das Gewünschte.

N.R. $|f_{n'_k}|^p = |f_{n'_k} - f + f|^p \leq (|f_{n'_k} - f| + |f|)^p$

$\leq 2^p |f_{n'_k} - f|^p + 2^p |f|^p$

Satz 3.31. *Sei $1 \le p < \infty$, $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ m.b. Dann sind äquivalent*

i) $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$

ii) $f_n \to f$ im Maß μ und $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichgradig p-integrierbar.

„ii) ⇒ i)": O.E. sei $f_n \to f$ μ-f.ü. (sonst gehe zu geeign. Teilfolge über)

$$\int |f|^p d\mu = \int |\lim_n f_n|^p d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\int |f_n|^p d\mu}_{\le \int_{\{|f_n|>g\}} |f_n|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \text{ für } g \in \mathcal{L}^p(\mu)} < \infty,$$

d.h. $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Zu $\varepsilon > 0$ sei $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ gem. Vor.

(d.h. $\int |f_n|^p \mathbb{1}_{\{|f_n|>g\}} d\mu \le \varepsilon \ \forall n$),

$$h := g + 2|f| \quad (\in \mathcal{L}^p(\mu))$$

$$\int |f_n|^p \mathbb{1}_{\{|f_n| \le h\}} d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int |f|^p d\mu.$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int |f_n|^p d\mu - \int |f|^p d\mu \right| \le \limsup_{n\to\infty} \int_{\{|f_n|>h\}} |f_n|^p d\mu \le \varepsilon$$

Satz 3.31. *Sei* $1 \leq p < \infty$, $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ *m.b. Dann sind äquivalent*

i) $f_n \to f$ *in* $\mathcal{L}^p(\mu)$

ii) $f_n \to f$ *im Maß* μ *und* $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ *ist gleichgradig p-integrierbar.*

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int |f_n|^p d\mu - \int |f|^p d\mu \right| \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\{|f_n|>h\}} |f_n|^p d\mu \leq \varepsilon$$

$$\underbrace{2^p\left(|f_n|^p + |f|^p\right)}_{\to 2|f|^p} - \underbrace{|f_n - f|^p}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2^{p+1}|f|^p \quad \mu\text{-f.ü.}$$

$\Rightarrow$

$$2^{p+1}\int |f|^p d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \Big(2^p \underbrace{\int |f_n|^p d\mu}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \int |f|^p d\mu} + 2^p \int |f|^p d\mu - \int |f_n - f|^p d\mu\Big)$$

$$\Rightarrow \quad \int |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\lrcorner$

Bemerkung 3.32. Sei $\mu(S) < \infty$, dann ist die Bedingung

$$(*) \qquad \inf_{M \in \mathbb{R}_+} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f|>M\}} |f|^p d\mu = 0 \tag{3.3}$$

äquivalent zur gleichgradigen Integrierbarkeit (von $\mathcal{F}$ bzgl. μ).

Bew.: Da $g(x) \equiv M$ erfüllt $\int |g|^p d\mu = M^p \mu(S) < \infty$, impliziert $(*)$ die gleichgr. Int.barkeit.

Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ gleichgr. int.bar

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\int_{\{|f|>g\}} |f|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $f \in \mathcal{F}$.

Wähle $M > 0$ mit $\int_{\{|g|>M\}} |g|^p d\mu = \int |g|^p \mathbb{1}_{\{|g|>M\}} d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ (denn Integrand $\xrightarrow[M\to\infty]{} 0$ μ-f.ü., verw. dom. Konv.)

$$\int_{\{|f|>M\}} |f|^p d\mu \leq \int_{\{|f|>g\}} |f|^p d\mu + \int_{\{|g|>M\}} |g|^p d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

für jedes $f \in \mathcal{F}$.

$\square$

Satz 3.33. *Sei* $\mu(S) < \infty$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$.

$\mathcal{F}$ ist gleichgradig integrierbar g.d.w.

$$\textit{es gibt } H : [0,\infty) \to [0,\infty) \textit{ mit } \lim_{x\to\infty} \frac{H(x)}{x} = \infty \textit{ und } \sup_{f\in\mathcal{F}} \int H(|f|)\, d\mu < \infty.$$

(und H messbar)

H kann monoton wachsend und konvex gewählt werden.

Bew.: „$\Leftarrow$“: $\inf_{x \geq M} \frac{H(x)}{x} =: K_M \nearrow_{M\to\infty} \infty$, somit

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|>M\}} |f|\, d\mu \leq \sup_{f\in\mathcal{F}} \frac{1}{K_M} \int_{\{|f|>M\}} H(|f|)\, d\mu \leq \frac{1}{K_M} \underbrace{\sup_{f\in\mathcal{F}} \int H(|f|)\, d\mu}_{<\infty} \xrightarrow{M\to\infty} 0$$

$$\left(|f| > M \text{ heißt } \frac{H(|f|)}{|f|} \geq K_M \Leftrightarrow |f| \leq \frac{H(|f|)}{K_M} \right.$$

Satz 3.33. *Sei* $\mu(S) < \infty$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$.

$\mathcal{F}$ *ist gleichgradig integrierbar g.d.w.*

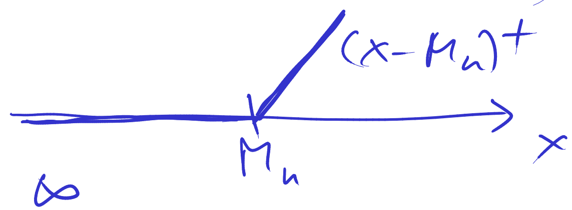
$$\text{es gibt } H : [0,\infty) \to [0,\infty) \text{ mit } \lim_{x\to\infty} \frac{H(x)}{x} = \infty \text{ und } \sup_{f\in\mathcal{F}} \int H(|f|)\, d\mu < \infty.$$

H kann monoton wachsend und konvex gewählt werden.

„$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{F}$ glgr. int.bar, wähle $M_n \nearrow_{n\to\infty} \infty$ mit

$$\int (|f| - M_n)^+ d\mu \le \int_{\{|f|>M_n\}} |f|\, d\mu \le 2^{-n} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}.$$

Setze $H(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (x - M_n)^+$ (Reihe in Wirklichkeit endl.,
$x \mapsto H(x)$ ist monoton & konvex)



für $x \ge 2M_k$ ist

$$\frac{H(x)}{x} \ge \sum_{n=1}^{k} \Big(1 - \underbrace{\frac{M_n}{x}}_{\le 1/2}\Big) \ge \frac{k}{2}, \quad \text{d.h. } \frac{H(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

und für $f \in \mathcal{F}$:

$$\int H(|f|)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int (|f| - M_n)^+ d\mu \le \sum_n^{\infty} 2^{-n} \;\checkmark\; \infty$$

Korollar 3.34. $\mu(S) < \infty$, $p > 1$,

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^p(\mu) \, (\subset \mathcal{L}^1(\mu)) \;\; \textit{mit} \;\; \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_p < \infty$$

(„$\mathcal{F}$ ist $\mathcal{L}^p(\mu)$-beschränkt“), so ist $\mathcal{F}$ gleichgradig integrierbar.

(Verwende $H(x) = x^p$)