Erinnerung 1.26. Eine *Verteilungsfunktion* (einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$) ist eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, die nicht-fallend und rechtsstetig ist mit $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Satz 1.27. *Zu jeder Verteilungsfunktion F gehört genau ein W'maß μ_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit*

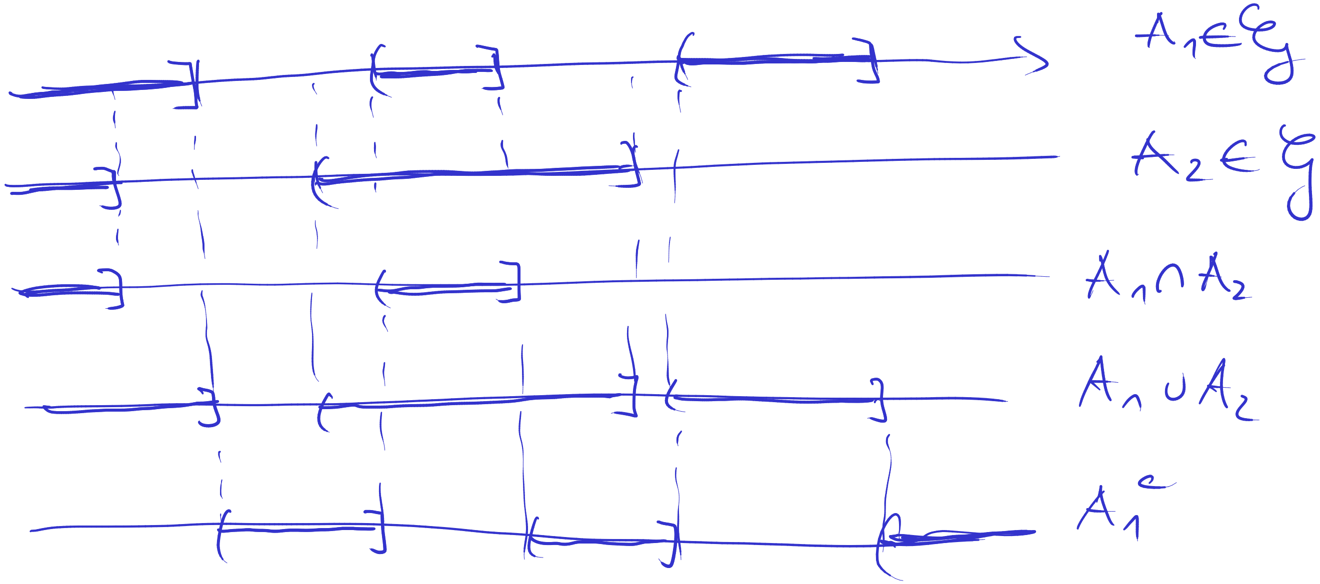
$$\mu_F\big((-\infty, x]\big) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bew.: $\mathcal{J}_1 := \{(a,b] : -\infty < a < b < \infty\}$, $\mathcal{J}_2 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$,

$\mathcal{J}_3 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{G} := \{ \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} I_j : n \in \mathbb{N}, I_j \in \mathcal{J} \}$ $\quad (\mathcal{J} := \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3)$,

$\mathcal{G}$ <u>ist</u> eine Algebra.



26a

Bew.: $\mathcal{J}_1 := \{(a,b] : -\infty < a < b < \infty\}$, $\mathcal{J}_2 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$,

$\mathcal{J}_3 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{C} := \{ \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} I_j : n \in \mathbb{N},\ I_j \in \mathcal{J} \}$ $\quad (\mathcal{J} := \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3)$,

$A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k$ mit $I_k = (a_k, b_k]$ $(\cap \mathbb{R})$ $, -\infty \le a_k < b_k \le +\infty$

setze $\mu(A) := \sum_{k=1}^{n} \big(F(b_k) - F(a_k)\big)$ $\quad$ (mit $F(+\infty) := 1$
$F(-\infty) := 0$)

μ ist wohldefiniert. (z.B. $I_k = (a_k, c_k] \cup (c_k, b_k]$
mit $a_k < c_k < b_k$,
dann $F(c_k) - F(a_k) + F(b_k) - F(c_k)$
$= F(b_k) - F(a_k)$)

und μ ist (endl.) additiv. ✓

$A = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} I_k$ mit $I_k = (a_k, b_k]$ $(\cap \mathbb{R})$

setze $\mu(A) := \sum_{k=1}^{n} (F(b_k) - F(a_k))$ (beachte $\mu(\mathbb{R}) = 1$)

zeige: μ ist $\emptyset$-stetig auf $\mathcal{G}$ ($\overset{\text{Prop. 1.20}}{\Longrightarrow}$ μ σ-additiv auf $\mathcal{G}$)

Ziel: Sei $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \varepsilon > 0$,
dann gilt: $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$.

(Zwischen-Ziel: $I \in \mathcal{J}$, $\delta > 0$, dann gibt es $-\infty < u < v < \infty$ mit
$[u, v] \subset I$, $\mu((u,v]) \geq \mu(I) - \delta$.

für $I = (a, b]$: wähle $v = b$, wegen $\lim_{u \searrow a} F(u) = F(a)$
ist geeign. Wahl von u möglich,

für $I = (-\infty, b]$: wähle $v = b$,
wegen $\lim_{u \to -\infty} F(u) = 0 = F(-\infty)$,
ist geeign. Wahl mögl.,

analog für $I = (a, \infty)$.)

Ziel: Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{G}$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \varepsilon > 0$, dann gilt: $\bigcap_n A_n \neq \emptyset$. ✓ (denn $\bigcap_n A_n \supset \bigcap_n K_n \neq \emptyset$) 26 c

(Zwischen-Ziel: $I \in \mathcal{J}$, $\delta > 0$, dann gibt es $-\infty < u < v < \infty$ mit $[u,v] \subset I$, $\mu((u,v]) \geq \mu(I) - \delta$). ✓

Wähle z A_n ein $B_n \in \mathcal{G}$ beschränkt mit $B_n \subset \overline{B_n} \subset A_n$ und $\mu(A_n \setminus B_n) \leq \varepsilon \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$

(beachte $\overline{B_n}$ ist kompakt).

$$\mu\Big(A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} B_k\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \setminus B_k)\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\Big) = \underbrace{\mu(A_n)}_{\geq \varepsilon} - \underbrace{\mu\Big(A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} B_k\Big)}_{< \varepsilon/2} \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

$K_n := \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k} \supset \bigcap_{k=1}^{n} B_k \neq \emptyset$, K_n ist kompakt, $K_n \supset K_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ (Cantor'scher Durchschnittssatz)

Lemma 1.28. $(\Omega, \mathscr{A})$ *messbarer Raum,* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *Maße darauf,* $c_1, c_2, \cdots \geq 0$*, so ist* $\mu := \sum_n c_n \mu_n$ *ebenfalls ein Maß auf* $(\Omega, \mathscr{A})$.

Wenn alle μ_n *W'maße sind und* $\sum_n c_n = 1$*, so ist auch* μ *ein W'maß.*

(d.h. $A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n(A)$)

Bew.: $\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot 0 = 0$,

$\mu(A) \geq 0$ für jedes $A \in \mathcal{A}$,

seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarw. disjunkt

μ_n σ-add.

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n(A_k)}_{= \mu(A_k)},$$

Doppelreihe mit nicht-neg. Summanden kann umsummiert werden.

d.h. μ ist σ-add.

$\lrcorner$

Satz 1.29 (Konstruktion des (Borel-)Lebesgue-Maßes[4] auf $\mathbb{R}$). *Es gibt genau ein Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\lambda\big((a,b]\big) = b - a$ für $a < b$.*

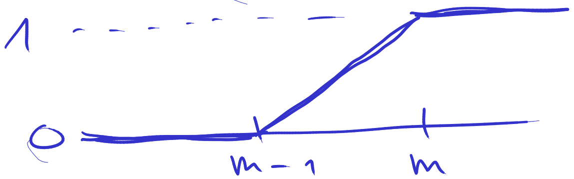
Bew.: 1) $F_1(x) := \overbrace{\overbrace{(x \wedge 1)}^{\min\{x,1\}} \vee 0}^{\max\{\min\{x,1\},0\}}$ ist Verteilungsfkt. (von Unif$[0,1]$),

$\lambda_{(0,1]}$ sei das nach Satz 1.27 zugeh. Maß

$\lambda_{(0,1]}(A) = 0$ wenn $A \subset (0,1]^c$ (denn $\lambda_{(0,1]}((0,1]^c) = 0$),

für $0 < u < v \leq 1$ ist $\lambda_{(0,1]}((u,v]) = F_1(v) - F_1(u) = v - u$ ✓

2) $m \in \mathbb{Z}$, konstruiere $\lambda_{(m-1,m]}$ via $F_m(x) = ((x - m + 1) \wedge 1) \vee 0$

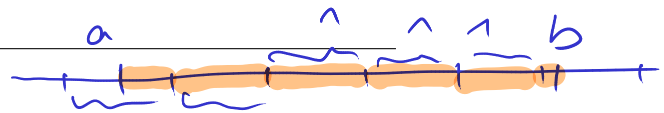


$$\lambda := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_{(m-1,m]}(\cdot)$$

ist Maß gem. Lemma 1.28

Für $-\infty < a < b < \infty$

$$\lambda((a,b]) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \lambda_{(m-1,m]}((a,b]) = \sum_{\cancel{m \in \mathbb{Z}}\; m = \lfloor a \rfloor}^{\lceil b \rceil} \big((b \wedge (m+1)) - (a \vee m)\big) = b - a$$



[4]Henri Lebesgue, 1875–1941

Bemerkung 1.30. 1. Das Lebesgue-Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist translationsinvariant, d.h. $\lambda(A+x) = \lambda(A)$ für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$.

($A \mapsto \lambda(x+A)$ ist Maß,

$b-a = \lambda((a,b]) = \lambda((a,b]+x) = \lambda((a+x, b+x])$ ✓

2. (Analogon von Satz 1.27 für allgemeine endliche Maße) Jede beschränkte, nicht-fallende, rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ steht via

$$\mu_F\big((-\infty, x]\big) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

in eindeutiger Beziehung zu einem endlichen Maß μ_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

$\tilde{F}(x) = \dfrac{F(x)}{\sup\{F(y) : y \in \mathbb{R}\}}$

$\tilde{F}$ ist Vert.fkt. eines W'maßes ✓

3. (Lebesgue-Stieltjes-Maße) Zu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht-fallend und rechtsstetig gibt es genau ein Maß μ_F auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$\mu_F\big((a, b]\big) = F(b) - F(a), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

betr. $F((x \wedge m) \vee (m-1)) - F(m-1) =: F_m(x)$

Sei μ_m das zu F_m gehörige Maß

($F_m(x) = 0$ für $x < m-1$,
$F_m(x) \equiv F(m) - F(m-1)$ für $x \geq m$,
ist Vert.fkt. e. endl. Maßes)

$\mu_F := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mu_m$ tut's ⌟

(Vorstellung: $F(x) = \mu((-\infty,x_1]\times\ldots\times(-\infty,x_d])$ für ein μ), $x = (x_1,\ldots,x_d)$

Zum d-dimensionalen Fall:

Definition 1.31. $F : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ heißt eine *d-dimensionale Verteilungsfunktion*, wenn es folgenden Bedingungen genügt:

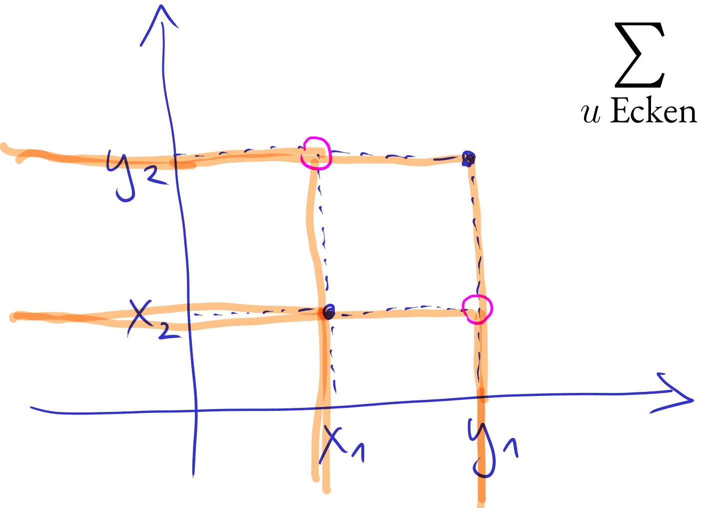
(d.h. $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,d})$, so soll $x_{n,i} \underset{n\to\infty}{\searrow} x_i$, $i = 1,\ldots,d$)

1. F rechtsstetig, d.h. $x_n \searrow x$ (koordinatenweise) $\Rightarrow F(x_n) \to F(x)$
2. $F(x_n) \to 1$ wenn $x_n \to (+\infty, \ldots, +\infty)$
3. $F(x_n) \to 0$ wenn $\min_{i=1,\ldots,d} x_{n,i} \to -\infty$
4. Für $x = (x_1, \ldots, x_d) < y = (y_1, \ldots, y_d)$ (koordinatenweise), parametrisiere die Ecken des d-Quaders $(x, y]$ mit $\{1,2\}^d$ via

$$\left\{u = (z_1^{(i_1)}, \ldots, z_d^{(i_d)}) : i_1, \ldots, i_d \in \{1,2\}\right\}$$

wo $z_j^{(1)} = x_j$, $z_j^{(2)} = y_j$, es muss gelten

$$\sum_{u \text{ Ecken}} (-1)^{\#\{1\le m\le d:\, i_m=1\}} F(u) \Big(= \mu_F((x,y]) \Big) \ge 0$$



Satz 1.32. *W'maße auf* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *und d-dimensionale Verteilungsfunktionen F stehen in* 1-1*-Beziehung via*

$$\mu_F\Big(\underbrace{(-\infty, x]}_{= (-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2] \times \dots \times (-\infty, x_d]}\Big) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

für $x = (x_1, \dots, x_d)$

Siehe auch Ü'blatt 3.

Idee: Verwende als Algebra

$$\left\{ \bigcup_{j=1}^{m} \left(I_{j,1} \times I_{j,2} \times \dots \times I_{j,d} \right) : m \in \mathbb{N}, I_{j,k} \in \mathcal{J} \right\}$$

wie im Bew. von Satz 1.27.

Korollar 1.33 (d-dimensionale Produktmaße)**.** *Seien $\mu_1, \ldots, \mu_d$ W'maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dann gibt es genau ein W'maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit*

$$\mu\big((-\infty, x]\big) = \prod_{i=1}^{d} \mu_i\big((-\infty, x_i]\big), \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Man schreibt $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_d$, es gilt

$$\mu(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_1) \cdot \cdots \cdot \mu_d(A_d), \quad A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{1.1}$$

Sei F_i die Vert. fkt. von μ_i. $F((x_1, \ldots, x_d)) := F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_d(x_d)$

Zeige: F ist d-dim. Vert. fkt.: Rechtsstetigk. ✓, Grenzwert bei $x \to (+\infty, \ldots, +\infty)$ $= 1$ ✓

Grenzwert bei $\min\{x_{n,i}, i = 1, \ldots, d\} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ $= 0$ ✓

zu Bed. 4. aus Def. 1.31: ✓

Sei $a = (a_1, \ldots, a_d) < (b_1, \ldots, b_d) = b$ (koord. weise)

(d.h. $(a,b] = (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_d, b_d]$ ist d-dim. Quader)

$x = (x_1, \ldots, x_d)$

$$\prod_{i=1}^{d} \mathbb{1}(a_i < x_i \le b) = \prod_{i=1}^{d} \big(\mathbb{1}(x_i \le b_i) - \mathbb{1}(x_i \le a_i)\big) = \sum_{K \subset \{1, \ldots, d\}} (-1)^{|K|} \mathbb{1}(x \le e(a,b,K))$$

mit $e(a,b,K)_i = \begin{cases} a_i, & i \in K \\ b_i, & i \notin K \end{cases}$

$$\sum_{K \subset \{1, \ldots, d\}} (-1)^K F(e(a,b,K)) = \sum_{K \subset \{1, \ldots, d\}} (-1)^K \prod_{i \in K} F_i(a_i) \cdot \prod_{j \notin K} F_j(b_j) = \prod_{i=1}^{d} \underbrace{\big(F_i(b_i) - F_i(a_i)\big)}_{\geq 0}$$