Korollar 3.34. $\mu(S) < \infty$, $p > 1$,

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^p(\mu)\ (\subset \mathcal{L}^1(\mu)) \ \text{ mit } \ \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_p < \infty$$

(„$\mathcal{F}$ ist $\mathcal{L}^p(\mu)$-beschränkt“), so ist $\mathcal{F}$ gleichgradig integrierbar.

(Verwende $H(x) = x^p$)

Wähle in Satz 3.33 $H(x) = x^p$ $(x \geq 0)$,

dann ist $\int H(|f|)\, d\mu = \int |f|^p d\mu = (\|f\|_p)^p$,

d.h. $\sup_{f\in\mathcal{F}} \int H(|f|)\, d\mu < \infty$, H ist superlinear.

3.2 Parameterintegrale

$(S, \mathscr{A}, \mu)$ Maßraum, U metrischer Raum, $f : S \times U \to \mathbb{R}$

Satz 3.35. *Sei $u_0 \in U$, es gelte*

i) $u \mapsto f(x,u)$ ist stetig in u_0 für μ-f.a. $x \in S$

ii) $x \mapsto f(x,u)$ ist messbar für alle $u \in U$

iii) $h : x \mapsto \sup_{u \in U} |f(x,u)|$ liegt in $\mathcal{L}^1(\mu)$

Dann ist $F : U \to \mathbb{R}$, $F(u) = \int f(x,u)\, \mu(dx)$ stetig in u_0

Bew.: Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ mit $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_0$,

$$F(u_n) - F(u_0) = \int_S \big(f(x,u_n) - f(x,u_0) \big)\, \mu(dx)$$

$\Longrightarrow$

$$|F(u_n) - F(u_0)| \leq \int_S \underbrace{|f(x,u_n) - f(x,u_0)|}_{\leq h(x)}\, \mu(dx) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

mit dom. Konv. $\lrcorner$

Satz 3.36. *$U \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $f : S \times U \to \mathbb{R}$ mit*

i) $\forall\, u \in U$: $x \mapsto f(x,u)$ liegt in $\mathcal{L}^1(\mu)$

ii) Für μ-f.a. $x \in S$ ist $u \mapsto f(x,u)$ nach u differenzierbar (mit Ableitung $f'(x,u)$)

iii) $h : x \mapsto \sup_{u \in U} |f'(x,u)|$ liegt in $\mathcal{L}^1(\mu)$

Dann ist für $u \in U$ $f'(\cdot,u) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $F(u) = \int f(x,u)\,\mu(dx)$ ist auf U diff'bar mit

$$F'(u) = \int f'(x,u)\,\mu(dx)$$

Bew.: Sei $(u_n)_n \subset U$, $u_n \to u_0 \in U$, $u_n \neq u_0$ $\forall n$

$$g_n(x) := \frac{f(x,u_n) - f(x,u_0)}{u_n - u_0}, \quad g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(\cdot,u_0) \quad (\mu\text{-f.ü.})$$

$$|g_n(x)| = \left| \frac{f'(x,v_n)\cancel{(u_n-u_0)}}{\cancel{u_n-u_0}} \right| = |f'(x,v_n)| \leq h(x)$$ mit Zwischenwertsatz d. Diff.rechnung,

somit

$$\int g_n \, d\mu = \frac{F(u_n) - F(u_0)}{u_n - u_0} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int f'(x,u_0)\,\mu(dx)$$ mit dom. Konvergenz $\square$

Beispiel 3.37 (Laplace-Transformierte)**.** $X \geq 0$ ZV auf W'raum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $U = [0, \infty)$, $f(x,u) = e^{-ux}$. Dann ist $F(u) := \mathbb{E}\left[e^{-uX}\right]$ ∞-oft diff'bar in $(0, \infty)$ und

$$F^{(k)}(u) = (-1)^k \mathbb{E}\left[X^k e^{-uX}\right]$$

$\frac{\partial}{\partial u} e^{-ux} = -x e^{-ux}$, $\sup_{x \geq 0} x e^{-ux} < \infty$ für $u > 0$

d.h. Bed. aus Satz 3.36 sind erfüllt

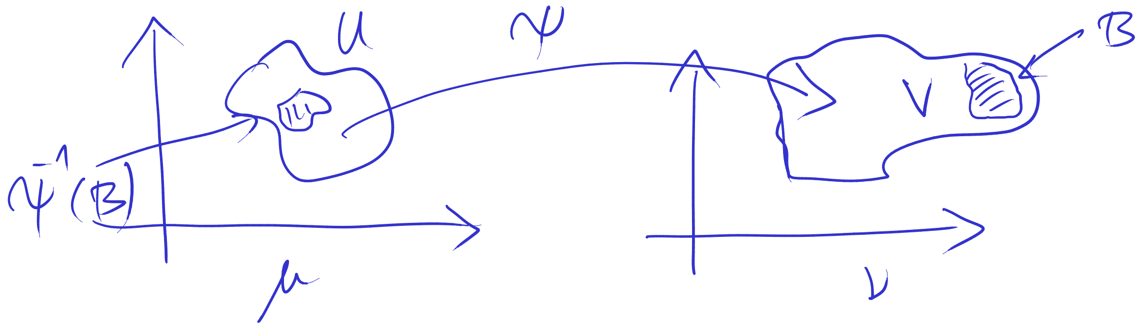
und $\frac{\partial}{\partial u} \mathbb{E}[e^{-uX}] = -\mathbb{E}[X e^{-uX}]$ (für $u > 0$).

3.3 Zur Dichtetransformation

Satz 3.38 (Dichtetransformationsformel). *$U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\psi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, μ Maß auf U mit Dichte f bzgl. dem Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}^d$, dann hat das Bildmaß $\nu := \mu \circ \psi^{-1}$ (auf V) die Dichte*

$$g(v) = \frac{1}{\left|\det D\psi\big(\psi^{-1}(v)\big)\right|} f\big(\psi^{-1}(v)\big), \quad v \in V$$

bezüglich λ, wo $D\psi(u) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i,j=1}^{d}$ die Jacobi-Matrix (von ψ and der Stelle $u \in U$) ist.



betr. den Fall $d=1$, ψ sei strikt wachsend, $a<b$

$$\nu((a,b]) = \mu\big((\psi^{-1}(a), \psi^{-1}(b)]\big) = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(\psi^{-1}(y)) \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))}\,dy, \quad \text{d.h. } \nu \text{ hat Dichte } \frac{f(\psi^{-1}(y))}{\psi'(\psi^{-1}(y))}$$

substituiere $x = \psi^{-1}(y)$, $\frac{dx}{dy} = (\psi^{-1})'(y) = \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))}$

3.3 Zur Dichtetransformation

Satz 3.38 (Dichtetransformationsformel). *$U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\psi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus, μ Maß auf U mit Dichte f bzgl. dem Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}^d$, dann hat das Bildmaß $\nu := \mu \circ \psi^{-1}$ (auf V) die Dichte*

$$g(v) = \frac{1}{\left|\det D\psi\big(\psi^{-1}(v)\big)\right|} f\big(\psi^{-1}(v)\big), \quad v \in V$$

bezüglich λ, wo $D\psi(u) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(u)\right)_{i,j=1}^{d}$ die Jacobi-Matrix (von ψ and der Stelle $u \in U$) ist.

Bew.: Wähle $\varphi = \psi^{-1}$ in Satz 3.39, $A \subset V$ Borel-messb.

$$\nu(A) = \mu(\psi^{-1}(A)) = \int_U \underbrace{\mathbb{1}_{\psi^{-1}(A)}(u) \cdot f(u)}_{=(\mathbb{1}_{\psi^{-1}(A)} \cdot f)(u)} \lambda(du)$$

(λ = d-dim. Lebesgue-Maß)

$$= \int_V (\mathbb{1}_{\psi^{-1}(A)} f)(\psi^{-1}(v)) \, |\det(D\psi^{-1})(v)| \, \lambda(dv)$$

$$= \int_V \mathbb{1}_A(v) \, f(\psi^{-1}(v)) \frac{1}{|\det(D\psi)(\psi^{-1}(v))|} \lambda(dv)$$

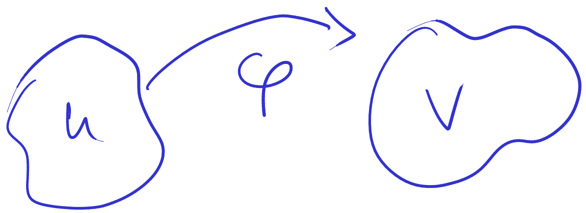
$\lrcorner$

Satz 3.39 (Transformationsformel von Jacobi, „d-dimensionale Substitution“)**.** *$U, V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\varphi : U \to V$ C^1-Diffeomorphismus, dann gilt*

$$\lambda\big(\varphi(B)\big) = \int_B |\det D\varphi|\, d\lambda \quad \textit{für } B \subset U \ \textit{ Borel-messbar} \tag{3.4}$$

und

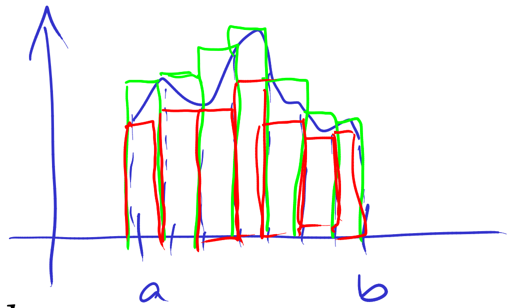
$$\int_V f(v)\,\lambda(dv) = \int_U f\big(\varphi(u)\big)\,|\det D\varphi(u)|\,\lambda(du) \quad \textit{für } f \in \mathcal{L}^1(\lambda|_V) \tag{3.5}$$



3.4 Zum Zusammenhang mit dem Riemann-Integral

Erinnerung 3.40 (Riemann-Integral)**.** $I = [a,b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt, $\mathbf{t} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ Partition von $[a,b]$ mit Feinheit $w(\mathbf{t}) = \max_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1})$, $o_j = o_j(f,\mathbf{t}) := \sup_{t_{j-1}\le t\le t_j} f(t)$, $u_j = u_j(f,\mathbf{t}) := \inf_{t_{j-1}\le t\le t_j} f(t)$.

$$U_{\mathbf{t}}(f) := \sum_{j=1}^{n} u_j \cdot (t_j - t_{j-1}), \quad O_{\mathbf{t}}(f) := \sum_{j=1}^{n} o_j \cdot (t_j - t_{j-1})$$



heißen die Unter- und die Obersumme (von f bezgl. der Partition $\mathbf{t}$).

f heißt (eigentlich) *Riemann-integrierbar* (auf I), wenn gilt

$$\lim_{m\to\infty} U_{\mathbf{t}^{(m)}}(f) = \lim_{m\to\infty} O_{\mathbf{t}^{(m)}}(f) =: \int_a^b f(x)\,dx$$

für jede Folge von Partitionen $(\mathbf{t}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $w(\mathbf{t}^{(m)}) \to 0$.

(Man kann dabei o.E. annehmen, dass $\mathbf{t}^{(m)} \subset \mathbf{t}^{(m+1)}$ gilt, d.h. die $\mathbf{t}^{(m)}$ bilden eine Folge von Verfeinerungen, sonst gehe sukzessive zur gemeinsamen Verfeinerung über.)

Satz 3.41. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt, $C := \{x \in [a,b] : f$ stetig in $x\}$, $D := [a,b] \smallsetminus C$. Dann gilt*

i) $C, D \in \mathcal{B}([a,b])$ und $f \cdot \mathbf{1}_C$ ist Borel-messbar

ii) f ist Riemann-integrierbar (über $[a,b]$) g.d.w. $\lambda(D) = 0$,

in diesem Fall gilt für sein Riemann-Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f \cdot \mathbf{1}_C \,d\lambda \quad \Big(= \int_{[a,b]} f\,d\lambda, \ \textit{sofern } f \textit{ Borel-messbar}\Big)$$

Beweisskizze. i) Sei $\mathbf{t}^{(m)} = \{t_0^{(m)}, t_1^{(m)}, \dots, t_{n_m}^{(m)}\}, m \in \mathbb{N}$ eine Folge von Verfeinerungen mit $w(\mathbf{t}^{(m)}) \to 0$,

$$g_m := \sum_{j=1}^{n_m} u_j(f, \mathbf{t}^{(m)}) \mathbf{1}_{(t_{j-1}^{(m)}, t_j^{(m)}]}, \qquad h_m := \sum_{j=1}^{n_m} o_j(f, \mathbf{t}^{(m)}) \mathbf{1}_{(t_{j-1}^{(m)}, t_j^{(m)}]},$$

dann ist $g_m \le f \le h_m$ und $U_{\mathbf{t}^{(m)}}(f) = \int g_m\,d\lambda$, $O_{\mathbf{t}^{(m)}}(f) = \int h_m\,d\lambda$. Die Folge $(g_m)_m$ steigt auf gegen eine Borel-messbare Funktion g, $(h_m)_m$ steigt ab gegen eine Borel-messbare Funktion h, somit gilt $g \le f \le h$ auf I, weiter ist

$$\big\{x \in I : g(x) < h(x)\big\} \subset D \subset \big\{x \in I : g(x) < h(x)\big\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \{t_0^{(m)}, t_1^{(m)}, \dots, t_{n_m}^{(m+1)}\}$$

und man gewinnt daraus die geforderten Messbarkeitseigenschaften.

ii) Es ist

$$\int g\,d\lambda = \lim_{m\to\infty} \int g_m\,d\lambda = \lim_{m\to\infty} U_{\mathbf{t}(m)}(f),$$
$$\int h\,d\lambda = \lim_{m\to\infty} \int h_m\,d\lambda = \lim_{m\to\infty} O_{\mathbf{t}(m)}(f)$$

(mit dominierter Konvergenz), wegen $g \leq h$ also

$$g = h\ \lambda\text{-f.ü.} \iff \lambda(D) = 0 \iff f \text{ Riemann-integrierbar.}$$

Das Beispiel $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ zeigt, dass eine Lebesgue-integrierbare Funktion nicht Riemann-integrierbar sein muss.

Für das uneigentliche Riemann-Integral über die Achse oder eine Halbachse, das man im Sinne eines Grenzwerts bezüglich der Integrationsgrenze definiert (sofern dieser Grenzwert existiert), gilt die analoge Aussage nicht immer: Beispielsweise existiert

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x}\,dx \ (= \pi/2)$$

im Sinne der uneigentlichen Riemann-Integrale, aber die Funktion $\sin(x)/x$ liegt nicht in $\mathcal{L}^1(\lambda|_{[0,\infty)})$ (denn $\int_{[0,\infty)} |\sin(x)/x|\,\lambda(dx) = \infty$).