Korollar 1.33 (*d*-dimensionale Produktmaße)**.** *Seien $\mu_1, \dots, \mu_d$ W'maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dann gibt es genau ein W'maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit*

$$\mu\big((-\infty, x]\big) = \prod_{i=1}^{d} \mu_i\big((-\infty, x_i]\big), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Man schreibt $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_d$, es gilt

$$\mu(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_1) \cdot \cdots \cdot \mu_d(A_d), \quad A_1, \dots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{1.1}$$

Sei F_i die Vert. fkt. von μ_i. $F((x_1, \dots, x_d)) := F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_d(x_d)$

Zeige: F ist d-dim. Vert. fkt.: Rechtsstetigk. ✓, Grenzwert bei $x \to (+\infty, \dots, +\infty)$ $= 1$ ✓

Grenzwert bei $\min\{x_{n,i}, i = 1, \dots, d\} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ $= 0$ ✓

zu Bed. 4. aus Def. 1.31: ✓

Sei $a = (a_1, \dots, a_d) < (b_1, \dots, b_d) = b$

(koord. weise)

(d.h. $(a,b] = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$ ist d-dim. Quader)

$x = (x_1, \dots, x_d)$

$$\prod_{i=1}^{d} 1\!\!1(a_i < x_i \le b) = \prod_{i=1}^{d} \big(1\!\!1(x_i \le b_i) - 1\!\!1(x_i \le a_i)\big) = \sum_{K \subset \{1, \dots, d\}} (-1)^{|K|} 1\!\!1(x \le e(a,b,K))$$

mit $e(a,b,K)_i = \begin{cases} a_i, & i \in K \\ b_i, & i \notin K \end{cases}$

$$\sum_{K \subset \{1, \dots, d\}} (-1)^K F(e(a,b,K)) = \sum_{K \subset \{1, \dots, d\}} (-1)^K \prod_{i \in K} F_i(a_i) \cdot \prod_{j \notin K} F_j(b_j) = \prod_{i=1}^{d} \underbrace{\big(F_i(b_i) - F_i(a_i)\big)}_{\ge 0}$$

Korollar 1.33 (*d*-dimensionale Produktmaße)**.** *Seien $\mu_1, \dots, \mu_d$ W'maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dann gibt es genau ein W'maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit*

$$\mu\big((-\infty, x]\big) = \prod_{i=1}^{d} \mu_i\big((-\infty, x_i]\big), \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Man schreibt $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_d$, es gilt

$$(*) \quad \mu(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_1) \cdot \cdots \cdot \mu_d(A_d), \quad A_1, \dots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{1.1}$$

Zu (1.1): gilt, wenn $A_i = (-\infty, x_i]$ für gewisse $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$

$\mu_1'(A) := \mu(A \times (-\infty, x_2] \times (-\infty, x_3] \times \dots \times (-\infty, x_d])$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mu_1''(A) := \mu_1(A)\mu_2((-\infty, x_2]) \cdots \mu_d((-\infty, x_d])$,

dies <u>sind</u> Maße auf $\mathbb{R}$ mit $\mu_1'((-\infty, x]) = \mu_2'((-\infty, x])$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mu_1' = \mu_1''$.

Fixiere $A_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu_2'(A) := \mu(A_1 \times A \times (-\infty, x_3] \times \dots \times (-\infty, x_d])$

$\mu_2''(A) := \mu_1(A_1)\mu_2(A)\mu_3((-\infty, x_3]) \cdots \mu_d((-\infty, x_d])$

analog: $\mu_2' = \mu_2''$. Iteration bis zur d-ten Koord. liefert $(*)$ allg. $\rfloor$

Korollar 1.33 (d-dimensionale Produktmaße)**.** *Seien $\mu_1, \ldots, \mu_d$ W'maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dann gibt es genau ein W'maß μ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit*

$$\mu\big((-\infty, x]\big) = \prod_{i=1}^{d} \mu_i\big((-\infty, x_i]\big), \quad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Man schreibt $\mu = \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_d$, es gilt

$$\mu(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_d) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_1) \cdot \cdots \cdot \mu_d(A_d), \quad A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{1.1}$$

Satz 1.34 (d-dimensionales Lebesguemaß)**.** *Es gibt genau ein translationsinvariantes Maß λ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit $\lambda\big((0,1]^d\big) = 1$.*

$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$

Skizze: $\lambda_{(0,1]^d} = \underbrace{\lambda_{(0,1]} \otimes \cdots \otimes \lambda_{(0,1]}}_{d}$ (Lebesgue-Maß eingeschr. auf $(0,1]^d$)

$\lambda(A) := \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \lambda_{(0,1]^d}(z + A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

ist Maß mit $\lambda((0,1]^d) = 1$.

zeige: $\lambda\left(\bigtimes_{i=1}^{d} (a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$ für $-\infty < a_i < b_i < \infty$,

(besonders „leicht": $a_i = \frac{k_i}{n}$, $b_i = \frac{l_i}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k_i < l_i$, $k_i, l_i \in \mathbb{Z}$,

damit ist „alles" darstellbar mittels Translaten von $(0, \frac{1}{n}]^d$ (mit $\lambda((0,\frac{1}{n}]^d) = \frac{1}{n^d}$)

Definition 1.35 (Nullmengen)**.** $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ Maßraum. $N \in \mathscr{A}$ heißt (μ-)Nullmenge, wenn $\mu(N) = 0$ gilt.

$$\mathscr{N}_\mu := \{N \subset \Omega : \exists\, A \in \mathscr{A} \text{ mit } N \subset A \text{ und } \mu(A) = 0\}$$

Offenbar gilt

$$N_1, N_2, \dots \in \mathscr{N}_\mu \;\Rightarrow\; \bigcup_j N_j \in \mathscr{N}_\mu$$

Sprechweisen μ-fast überall (abgekürzt μ-f.ü.), bzw. auch μ-fast sicher, abgekürzt μ-f.s., wenn μ ein W'maß ist: Eine Eigenschaft

$$E(\omega) \text{ gilt } \mu\text{-f.ü., wenn } \left\{\omega \in \Omega : E(\omega) \text{ gilt nicht}\right\} \in \mathscr{N}_\mu$$

Für $A, B \in \mathscr{A}$ schreibt man $A = B \pmod{\mu}$, wenn $A \Delta B \in \mathscr{N}_\mu$.

$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

Bericht 1.36 (Maßvervollständigung, siehe z.B. [Kl, Bem. 1.70])**.**

$$\mathscr{A}_\mu = \sigma\left(\mathscr{A} \cup \mathscr{N}_\mu\right) = \left\{B \subset \Omega : \exists\, A \in \mathscr{A} : A \Delta B \in \mathscr{N}_\mu\right\}$$

ist eine σ-Algebra und

$$\mu(B) := \mu(A) \quad \text{wenn } A \in \mathscr{A} \text{ mit } A \Delta B \in \mathscr{N}_\mu$$

ist wohldefinierte Fortsetzung von μ auf $\mathscr{A}_\mu$.

1.3 Messbare Funktionen, Zufallsvariablen

Definition 1.37. $(\Omega, \mathscr{A})$, $(\Omega', \mathscr{A}')$ messbare Räume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt $\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-*messbar* (oft auch nur *messbar*, wenn die beteiligten σ-Algebren aus dem Kontext klar sind), wenn gilt

$$\forall\, B \in \mathscr{A}' : \; f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} \in \mathscr{A}.$$

Beobachtung 1.38. 1. (*Indikatorfunktion*). $A \in \mathscr{A}$, $\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$,

versehen mit $2^{\{0,1\}}$

$\subseteq \mathbb{R}$

versehen mit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

ist messbar ($\mathbf{1}_A^{-1}(\{0\}) = A^c$, $\mathbf{1}_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathscr{A}$).

2. (Komposition messbarer Abbildungen). $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$, $(\Omega_3, \mathscr{A}_3)$ messbare Räume, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ seien ($\mathscr{A}_1$-$\mathscr{A}_2$- bzw. $\mathscr{A}_2$-$\mathscr{A}_3$-)messbar.
Dann ist $h := g \circ f$ ($\mathscr{A}_1$-$\mathscr{A}_3$-)messbar.

$$\begin{tikzcd} \Omega_1 \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right] & \Omega_2 \arrow[r, bend left, "g"] & \Omega_3 \end{tikzcd}$$

Sei $B \in \mathcal{A}_3$:

$$h^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}_2}) \in \mathcal{A}_1 \quad ✓$$

Beobachtung und Definition 1.39 (Erzeugte σ-Algebra)**.** Sei $(\Omega', \mathscr{A}')$ messbarer Raum, $\Omega \neq \varnothing$, $h : \Omega \to \Omega'$.

$$\sigma(h) = \left\{h^{-1}(B) : B \in \mathscr{A}'\right\}$$

ist die kleinste σ-Algebra auf Ω, bezüglich der h messbar ist. (Falls $\mathscr{A}$ σ-Algebra auf Ω und h $\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-messbar, so gilt natürlich $\sigma(h) \subset \mathscr{A}$.)

$\sigma(h)$ heißt die von h *erzeugte σ-Algebra*.

Sind allgemeiner $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$, $i \in I$ messbarere Räume und $h_i : \Omega \to \Omega_i$ (I beliebige Indexmenge), so bezeichnet $\sigma(h_i, i \in I)$ die kleinste σ-Algebra auf Ω, bezüglich der alle h_i, $i \in I$ messbar sind.

$\mathscr{A}$ σ-Alg. auf Ω

Lemma 1.40 (Messbarkeit auf Erzeugermenge genügt)**.** *$f : \Omega \to \Omega'$, $\mathscr{E}' \subset 2^{\Omega'}$ mit $\sigma(\mathscr{E}') = \mathscr{A}'$, so ist f $\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-messbar g.d.w.*

$$\forall B \in \mathscr{E}' : \; f^{-1}(B) = \left\{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\right\} \in \mathscr{A}.$$

„$\Rightarrow$": ✓

„$\Leftarrow$": $\tilde{\mathscr{A}} := \{B \subset \Omega' : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$, $\tilde{\mathscr{A}} \supset \mathscr{E}'$,

$\tilde{\mathscr{A}}$ ist σ-Algebra, somit $\tilde{\mathscr{A}} = \mathscr{A}$!

Im Fall reellwertiger Funktionen lassen wir oft auch die Werte $+\infty$ oder $-\infty$ zu (Übergang von $\mathbb{R}$ zu $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$). Man spricht dann auch von „numerischen Funktionen".

Korollar 1.41. *1. Insbesondere für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (wobei $\mathbb{R}$ die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ trägt) genügt es (mit Bsp. 1.8) zu prüfen, dass*

$$f^{-1}(I) \in \mathscr{A} \quad \text{für alle Intervalle } I = [a, b]$$

(oder auch für alle offenen Intervalle, oder für alle Halbintervalle $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, etc.) gilt.

2. (Topologischer Fall). Wenn $f : \Omega \to E$, wobei E topologischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$, so genügt für Messbarkeit

$$f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathscr{A} \text{ für jedes offene } \mathcal{O} \subset E.$$

Insbesondere: falls Ω selbst ein topolgischer Raum (versehen mit seiner Borel-σ-Algebra) ist, so sind sind alle stetigen Abbildungen messbar.

Definition 1.42 (Produktraum, Produkt-σ-Algebra)**.** I endl. oder abzählbar, $(S_i, \mathscr{A}_i)$, $i \in I$ messbare Räume $S = \times_{i \in I} S_i = \{s = (s_i)_{i \in I} : s_i \in S_i\}$,

$$\mathscr{A}_\otimes := \sigma\Big(\Big\{\bigtimes_{i \in I} A_i : A_i \in \mathscr{A}_i\Big\}\Big)$$

(die von den „verallgemeinerten Quadern" erzeugte σ-Algebra) heißt die *Produkt-σ-Algebra* (der $\mathscr{A}_i$).

Mit den Koordinatenabbildungen (oder Projektionsabbildungen) $\pi_i : S \to S_i$, $\pi_i\big((s_j)_{j \in I}\big) = s_i$ ist $\mathscr{A}_\otimes = \sigma(\pi_i, i \in I)$.

(denn $\pi_i^{-1}(B_i) = \left(\bigtimes_{j \neq i} S_j\right) \times B_i$ für $B_i \in \mathscr{A}_i$)

Lemma 1.43 (Messbarkeit im Produktfall)**.** *S wie in Def. 1.42, $f : \Omega \to S$, $f(\omega) = \big(f_i(\omega)\big)_{i \in I}$ ist messbar g.d.w.*

(trage σ-Alg. $\mathcal{F}$)

$$f_i : \Omega \to S_i \quad \textit{messbar für jedes } i \in I.$$

„$\Rightarrow$": $f_i = \pi_i \circ f$ ist messbar

„$\Leftarrow$": $\mathscr{A}_\otimes \ni A = \bigtimes_{i \in I} A_i$ mit $A_i \in \mathscr{A}_i$, $f^{-1}(A) = \{\omega : f_i(\omega) \in A_i, i \in I\}$

$= \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}$

und solche Mengen erzeugen $\mathscr{A}_\otimes$. $\lrcorner$

Beobachtung 1.44. $S = \overline{\mathbb{R}}^\infty$, $\inf : S \to \mathbb{R}$ mit $\inf\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \inf_n x_n$ und $\sup : S \to \mathbb{R}$ mit $\sup\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sup_n x_n$ sind $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^\infty)$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar.

$$\inf^{-1}([x,\infty]) = [x,\infty] \times [x,\infty] \times \dots \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^\infty), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sup^{-1}([-\infty,x]) = [-\infty,x] \times [-\infty,x] \times \dots \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^\infty)$$

Lemma 1.45. *E topologischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$, $f_1, f_2, \dots : \Omega \to E$ seien ($\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(E)$-)messbar und*

$$f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \quad \textit{existiere für alle } \omega \in \Omega$$

Dann ist f ($\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(E)$-)messbar.

Sei $O \subset E$ offen, $f^{-1}(O) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} \underbrace{f_m^{-1}(O)}_{\in \mathscr{A}} \in \mathscr{A}$