Lemma 7.14. *Sind σ, τ Stoppzeiten, so sind auch $\sigma \wedge \tau$, $\sigma \vee \tau$ und $\sigma + \tau$ Stoppzeiten.*

Bemerkung. $\sigma - \tau$ ist im Allgemeinen keine Stoppzeit.

Bew. v. Lemma 7.14:

$n \in \mathbb{N}_0$: $\{\sigma \wedge \tau \leq n\} = \underbrace{\{\sigma \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\{\tau \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

$\{\sigma \vee \tau \leq n\} = \{\sigma \leq n\} \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

Zur Summe:

$\sigma \wedge n$, $\tau \wedge n$ <u>sind</u> Stoppzeiten, $\{\sigma \wedge n \leq m\}, \{\tau \wedge n \leq m\} \in \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$ für $m \leq n$

$\sigma' := \sigma \wedge n + \mathbb{1}_{\{\sigma > n\}}$, $\tau' := \tau \wedge n + \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}$

<u>sind</u> $\mathcal{F}_n$-messbar,

$\Rightarrow \sigma' + \tau'$ ist $\mathcal{F}_n$-messbar

$\{\sigma + \tau \leq n\} = \{\sigma' + \tau' \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

$\square$

Lemma 7.15. *Sind σ, τ Stoppzeiten mit $\sigma \le \tau$, dann gilt $\mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$.*

Sei $A \in \mathcal{F}_\sigma$ (d.h. $\forall n: A \cap \{\sigma \le n\} \in \mathcal{F}_n$). $\{\tau \le n\} \subset \{\sigma \le n\}$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$: $A \cap \{\tau \le n\} = (\underbrace{A \cap \{\sigma \le n\}}_{\in \mathcal{F}_n}) \cap \underset{\mathcal{F}_n}{\underset{\cap}{\{\tau \le n\}}} \in \mathcal{F}_n$

$\square$

Beobachtung 7.16. Sei $(\mathscr{F}_n)_n$ eine Filtration, T eine Stoppzeit mit $T < \infty$ f.s. und $(X_n)_n$ ein adaptierter stochastischer Prozess mit Werten in $(E, \mathscr{B})$. Dann ist $X_T = X_{T(\omega)}(\omega)$ eine $\mathscr{F}_T$-messbare Zufallsvariable und $X^{(T)} = (X_n^{(T)})_{n \in \mathbb{N}_0} = (X_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein adaptierter stochastischer Prozess.

(implizit: auf $\{T = \infty\}$ definiere X_T als konstant)

Bemerkung 7.17. $(X_n^{(T)})_n$ ist auch adaptiert an $\mathscr{F}^{(T)} := (\mathscr{F}_{T \wedge n})_n$.

Sei $B \in \mathcal{B}$. $\{X_T \in B\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \underbrace{\{T = k, X_k \in B\}}_{\in \mathcal{F}_k} \in \mathcal{F}$

Sei $n \in \mathbb{N}$

$$\{X_T \in B\} \cap \{T \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{T = k, X_k \in B\} \in \mathcal{F}_n .$$

$X_n^{(T)} = X_{T \wedge n}$ ist messbar bzgl. $\mathcal{F}_{T \wedge n} \underset{\text{Lemma 7.15}}{\subset} \mathcal{F}_n$

$\square$

Lemma 7.18. *Sei T eine Stoppzeit. Ist $(X_n)_n$ ein (Sub- / Super-) Martingal, so auch $(X_n^{(T)})_n$.*

Bew.: Setze $C_n := \mathbb{1}_{\{T \geq n\}}$, $n \in \mathbb{N}$,

$(C_n)_n$ ist previsibel: $\{T \geq n\} = \underbrace{\{T \leq n-1\}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}}{}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$.

$$X_{T \wedge n} = X_0 + \sum_{m=1}^{T \wedge n} (X_m - X_{m-1})$$

$$= X_0 + \sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}_{\{T \geq m\}} (X_m - X_{m-1})$$

$$= X_0 + (C \bullet X)_n .$$

$\Longrightarrow$ Lemma 7.10 (beachte: C beschr., ≥ 0) $(X_{T \wedge n})_n$ ist Martingal (bzw. Sub-/Super-Marti.)

$\lrcorner$

Korollar 7.19. *Sei X ein Supermartingal und T eine Stoppzeit. Es gelte mindestens eine der folgenden Bedingungen*

i) T ist beschränkt. ✓

ii) X ist beschränkt, d.h. $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n| \le c$ f.s. für ein $c \in \mathbb{R}_+$, und $T < \infty$ f.s. ✓

iii) $\mathbb{E}[T] < \infty$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n - X_{n-1}| \le c$ f.s. für ein $c \in \mathbb{R}_+$.

Dann gilt $\mathbb{E}[X_T] \le \mathbb{E}[X_0]$. (Im Falle eines Martingals gilt Gleichheit.)

Es gelte i) d.h. $T \le m$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

$(X_{T\wedge n})_n$ ist Supermartingal (Lemma 7.18), somit

$$\underbrace{\mathbb{E}[X_0]}_{=\mathbb{E}[X_{T\wedge 0}]} \ge \mathbb{E}[X_{T\wedge m}] = \mathbb{E}[X_T]$$

Es gelte ii): $X_T = \lim_{n\to\infty} X_{T\wedge n}$ (f.s.)

mit dominierter Konvergenz: $$\mathbb{E}[X_T] = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\mathbb{E}[X_{T\wedge n}]}^{\le \overbrace{\mathbb{E}[X_{T\wedge 0}]}^{= \mathbb{E}[X_0]}}$$

Korollar 7.19. *Sei X ein Supermartingal und T eine Stoppzeit. Es gelte mindestens eine der folgenden Bedingungen*

i) T ist beschränkt.

ii) X ist beschränkt, d.h. $\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|X_n| \le c$ f.s. für ein $c \in \mathbb{R}_+$, und $T < \infty$ f.s.

iii) $\mathbb{E}[T] < \infty$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}}|X_n - X_{n-1}| \le c$ f.s. für ein $c \in \mathbb{R}_+$.

Dann gilt $\mathbb{E}[X_T] \le \mathbb{E}[X_0]$. (Im Falle eines Martingals gilt Gleichheit.)

Es gelte iii) Wegen $\mathbb{E}[T] < \infty \Rightarrow T < \infty$ f.s.

und $X_{T\wedge n} \xrightarrow[n\to\infty]{} X_T$ f.s.

$$X_{T\wedge n} = X_0 + \sum_{m=1}^{T\wedge n}(X_m - X_{m-1})$$

$$\Rightarrow |X_{T\wedge n}| \le |X_0| + (T\wedge n)\cdot c \le |X_0| + c\cdot T,$$

mit dominierter Konv. gilt $\quad |X_0| + c\cdot T \in \mathcal{L}^1$

$$\mathbb{E}[X_T] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{T\wedge n}] \le \mathbb{E}[X_0]$$

$\lrcorner$

Sei $X_{i,n}$ = Gewinn von Spieler i nach Runde n.

$X_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$ der Gesamtgewinn der Spieler nach Runde n.

„Fairness" $\Longrightarrow \quad 0 = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_{R+3}]$

Zum Zeitpunkt $R+3$:

Spieler R hat 15 € Gewinn, Spieler $R+2$ hat 3 € Gewinn,
die übrigen $R+1$ Spieler haben -1 € Gewinn

Zum Standbsp. & Kor. 7.19, Fall iii):

$$|X_n - X_{n-1}| \le 1+2+4+8, \quad \mathbb{E}[\overbrace{R+3}^{\text{„}T\text{"}}] < \infty,$$

denn

$$\mathbb{P}(R > 4k) = \mathbb{P}\big((W_{4j+1}, W_{4j+2}, W_{4j+3}, W_{4j+4}) \neq (Z,K,Z,K),\ j = 0, 1, \dots, k-1\big)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{16}\right)^k, \text{ daher } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(R > n) < \infty, \text{ d.h. } \mathbb{E}[R] < \infty$$

7.2 Martingalkonvergenzsatz

C ist previsibel ✓

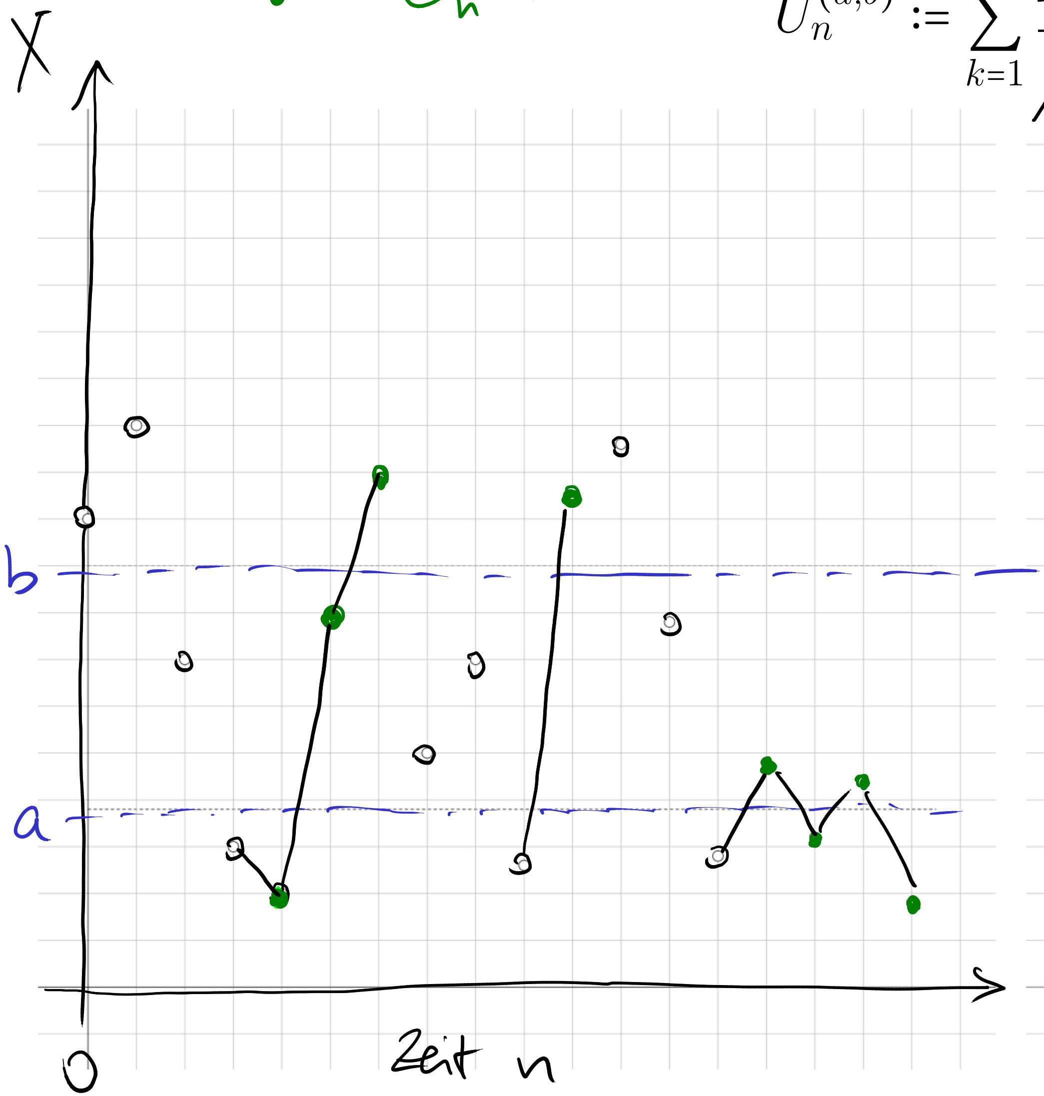
Sei $(X_n)_n$ ein adaptierter, reellwertiger Prozess und $-\infty < a < b < \infty$.

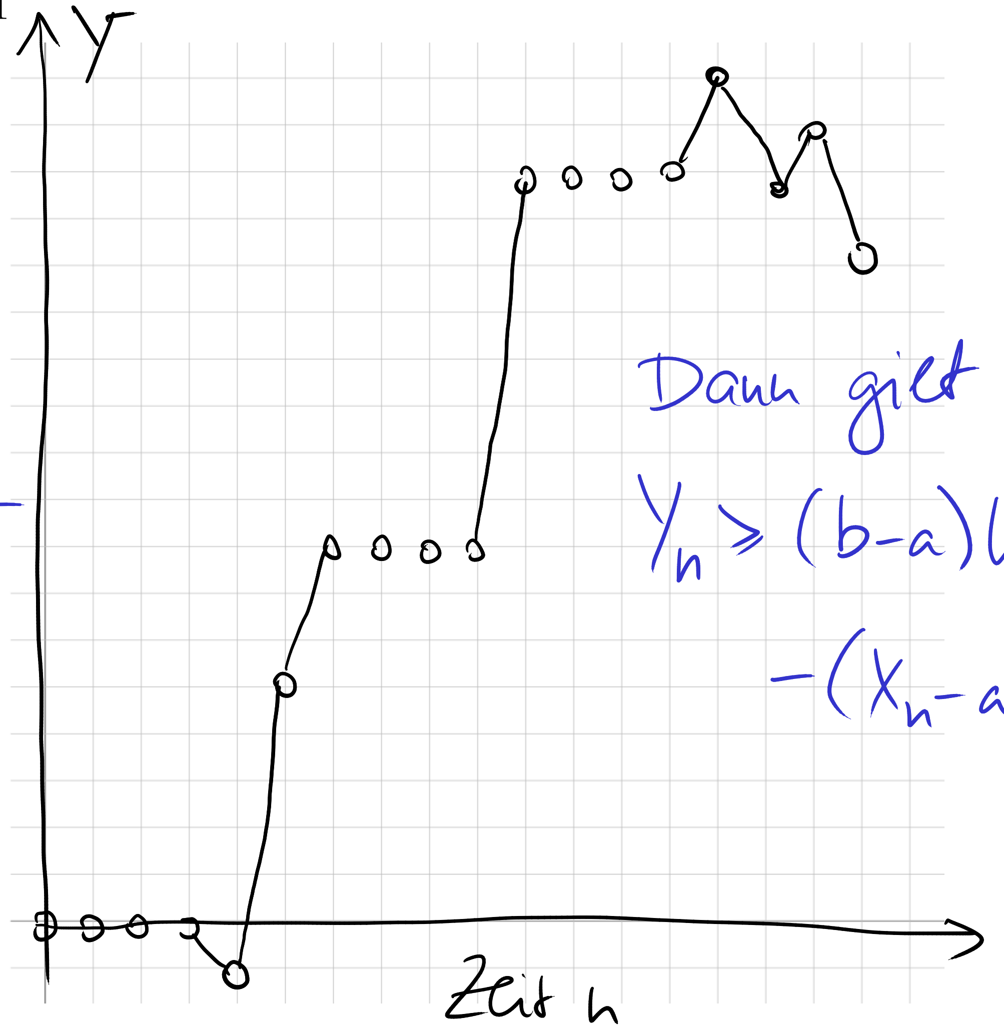
Setze $C_1 := \mathbf{1}_{\{X_0<a\}}$, für $n > 1$ rekursiv $C_n := \mathbf{1}_{\{C_{n-1}=1,\ X_{n-1}\leq b\}} + \mathbf{1}_{\{C_{n-1}=0,\ X_{n-1}<a\}}$ und

$\bullet \ \widehat{=}\ C_n = 1$

$$U_n^{(a,b)} := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{C_k=1,\ C_{k+1}=0\}}$$

$Y := C \bullet X$





Dann gilt

$Y_n \geq (b-a)\,U_n^{(a,b)} - (X_n - a)^-$

Lemma 7.20 (Doobs[2] Aufkreuzungslemma)**.** *Sei X ein Supermartingal. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}[U_n^{(a,b)}] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(X_n - a)^-].$$

Bew.: $Y = C \bullet X$, C ist nicht-neg., previsibel

$\Rightarrow$ Y ist Supermartingal

$$\Rightarrow \quad 0 = \mathbb{E}[Y_0] \geq \mathbb{E}[Y_n]$$
$$\geq \mathbb{E}[(b-a)U_n^{(a,b)} - (X_n - a)^-]$$
$$\geq (b-a)\mathbb{E}[U_n^{(a,b)}] - \mathbb{E}[(X_n - a)^-]$$

$\lrcorner$

[2] Joseph L. Doob, 1910-2004

Satz 7.21 (Doobs (Super-) Martingalkonvergenzsatz). *Ist $(X_n)_n$ ein Supermartingal mit $\sup_n \mathbb{E}[X_n^-] < \infty$, dann gibt es ein $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ mit $X_n \to X_\infty$ f.s.* ✓

Bew.: $-\infty < a < b < \infty$, $U_n^{(a,b)} \xrightarrow[n\to\infty]{} U_\infty^{(a,b)} = \sup_m U_m^{(a,b)}$.

$$\mathbb{E}[U_\infty^{(a,b)}] \overset{\text{mon. Konv.}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[U_n^{(a,b)}] \le \sup_m \frac{1}{b-a} \mathbb{E}[\underbrace{(X_m - a)^-}_{\le X_m^- + |a|}]$$

$$\le \sup_m \mathbb{E}[X_m^-] + |a| < \infty$$

$\Rightarrow U_\infty^{(a,b)} < \infty$ f.s.

$$O_{a,b} := \{\liminf_n X_n < a\} \cap \{\limsup_n X_n > b\} \subset \{U_\infty^{(a,b)} = \infty\}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(O_{a,b}) = 0$. $\Rightarrow \mathbb{P}(\liminf_n X_n < \limsup_n X_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},\, a<b} O_{a,b}) = 0$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_\infty := \limsup_n X_n$ f.s.

Satz 7.21 (Doobs (Super-) Martingalkonvergenzsatz)**.** *Ist* $(X_n)_n$ *ein Supermartingal mit* $\sup_n \mathbb{E}[X_n^-] < \infty$*, dann gibt es ein* $X_\infty \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ *mit* $X_n \to X_\infty$ *f.s.*

Zeige: $X_\infty \in \mathcal{L}^1$.

$$\mathbb{E}[X_\infty^-] = \mathbb{E}[\liminf_n X_n^-] \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_n \mathbb{E}[X_n^-] < \infty,$$

$$\mathbb{E}[X_\infty^+] = \mathbb{E}[\liminf_n X_n^+] \leq \liminf_n \underbrace{\mathbb{E}[X_n^+]}_{= \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{\leq \mathbb{E}[X_0]} + \mathbb{E}[X_n^-]} < \infty$$

Bem. 7.22

1. Satz 7.21 gilt für ein Submart. $(X_n)_n$, wenn $\sup_n \mathbb{E}[X_n^+] < \infty$

2. Im Allg. folgt aus den Vor. von Satz 7.21 nicht die $\mathcal{L}^1$-Konvergenz.