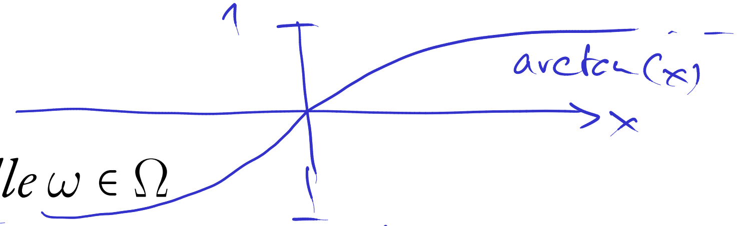
Beobachtung 1.44. $S = \overline{\mathbb{R}}^{\infty}$, $\inf : S \to \mathbb{R}$ mit $\inf\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \inf_n x_n$ und $\sup : S \to \mathbb{R}$ mit $\sup\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sup_n x_n$ sind $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^{\infty})$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar.

$$\inf^{-1}([x,\infty]) = [x,\infty] \times [x,\infty] \times \dots \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^{\infty}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sup^{-1}([-\infty,x]) = [-\infty,x] \times [-\infty,x] \times \dots \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^{\infty})$$

(Zu einer geeign. Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}^{\infty}$: Sei $d_{\overline{\mathbb{R}}}$ Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$



$d_{\overline{\mathbb{R}}}(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$

$$d_{\overline{\mathbb{R}}^\infty}((x_n),(y_n)) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(d_{\overline{\mathbb{R}}}(x_n,y_n) \wedge 1\right) \cdot 2^{-n}$$

bilde zug. Topologie, deren Borel-σ-Alg. ist $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})^{\otimes\infty}$)

Lemma 1.45. *E topologischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$, $f_1, f_2, \dots : \Omega \to E$ seien ($\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(E)$-)messbar und*

$$f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \quad \textit{existiere für alle } \omega \in \Omega$$

Dann ist f ($\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(E)$-)messbar.

Sei $O \subset E$ offen, $f^{-1}(O) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} \underbrace{f_m^{-1}(O)}_{\in \mathscr{A}} \in \mathscr{A}$

Definition 1.46 (Elementare Funktionen)**.** $(\Omega, \mathscr{A})$ messbarer Raum. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ der Form $f(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ heißt eine *elementare Funktion*.

Zerlege $f = f_+ - f_-$

(mit $f_+(\omega) = f(\omega) \vee 0$,
$f_-(\omega) = (-f(\omega)) \vee 0$)

Lemma 1.47. $(\Omega, \mathscr{A})$ *messbarer Raum.*

1. *Elementare Funktionen sind messbar.*
2. *Für $\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbares $f : \Omega \to [0, \infty]$ gibt es eine Folge von elementaren Funktionen f_n mit $f_n \nearrow_{n\to\infty} f$.*
3. *Jedes $\mathscr{A}$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbare $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ kann punktweise durch elementare Funktionen approximiert werden.* ✓

Zu 1. Sei $f(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$, o.E. A_i paarw. disjunkt

(notfalls disjunktifiziere: $B_I := \bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{j \notin I} A_j^c$)
$I \subset \{1, \ldots, n\}$ $(j \leq n)$

Sei $B \subset \overline{\mathbb{R}}$,
$f^{-1}(B) = \bigcup_{i:\, a_i \in B} A_i \in \mathscr{A}$ ✓

Zu 2. Idee: diskretisiere Werte von f ab Gitter mit Maschenweite 2^{-n}

$(2^{-n} \lfloor 2^n f(\omega) \rfloor) \wedge n =: f_n(\omega)$ leistet das Gewünschte. ✓

Lemma 1.48 (Faktorisierungslemma). *$(\Omega, \mathscr{A})$, $(\Omega', \mathscr{A}')$ messbare Räume, $f : \Omega \to \Omega'$ ($\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-)messbar. Dann ist $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar g.d.w.*

$$\textit{es gibt ein } \mathscr{A}'\text{-}\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \textit{ messbares } h : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}} \textit{ mit } g = h \circ f.$$

Bew.:

„$\Leftarrow$": Sei $g = h \circ f$, dann $g^{-1}(B) = f^{-1}(\underbrace{h^{-1}(B)}_{\in \mathscr{A}'}) \in \mathscr{A}$ für $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ✓

„$\Rightarrow$": Betr. zunächst den Fall $g \geq 0$.

Zeige: Es gibt $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(f)$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in [0, \infty)$ mit

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \mathbb{1}_{A_m}.$$

Sei $g_n := (2^{-n} \lfloor 2^n g \rfloor) \wedge n$, $B_{n,i} = \{\omega : g_n(\omega) - g_{n-1}(\omega) = \frac{i}{2^n}\}$, $i = 0, 1, \ldots, 2^n$

(ist $\sigma(f)$-m.b.) $\qquad \in 2^{-n}\mathbb{N}_0$ $\qquad \in \sigma(f)$

$$g_n - g_{n-1} = \sum_{i=0}^{2^n} i 2^{-n} \mathbb{1}_{B_{n,i}},$$

(denn g_n, g_{n-1} sind $\sigma(f)$-m.b.)

Schreibe
$$g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - g_{n-1}) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{2^n} i 2^{-n} \mathbb{1}_{B_{n,i}}$$

Lemma 1.48 (Faktorisierungslemma)**.** $(\Omega, \mathscr{A})$, $(\Omega', \mathscr{A}')$ *messbare Räume,* $f : \Omega \to \Omega'$ *$(\mathscr{A}$-$\mathscr{A}'$-)messbar. Dann ist $g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar g.d.w.*

$$\textit{es gibt ein } \mathscr{A}'\text{-}\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \textit{ messbares } h : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}} \textit{ mit } g = h \circ f.$$

„$\Longrightarrow$": Betr. zunächst den Fall $g \geq 0$.

Zeige: Es gibt $A_1, A_2, \dots \in \sigma(f)$ und $\alpha_1, \alpha_2, \dots \in [0,\infty)$

mit (*) $g = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \mathbb{1}_{A_m}$.

Sei $g_n := \left(2^{-n} \lfloor 2^n g \rfloor\right) \wedge n$, $B_{n,i} = \{\omega : g_n(\omega) - g_{n-1}(\omega) = \frac{i}{2^n}\}$ $\in 2^{-n}\mathbb{N}_0$

(ist $\sigma(f)$-m.b.) $i = 0, 1, \dots, 2^n$ $\in \sigma(f)$

$$g_n - g_{n-1} = \sum_{i=0}^{2^n} i\, 2^{-n} \mathbb{1}_{B_{n,i}},$$

(denn g_n, g_{n-1} sind $\sigma(f)$-m.b.)

Schreibe $g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - g_{n-1}) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{2^n} i\, 2^{-n} \mathbb{1}_{B_{n,i}}$ (**)

Sei $(n,i) \to m \in \mathbb{N}$ eine Bijektion,

dann ist (**) = (*).

Allg.: Zerlege $g = g_+ - g_-$, erhalte h_+ bzw. h_-, setze $h := h_+ - h_-$

Definition 1.49 (Bildmaß)**.** $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ Maßraum, $(\Omega', \mathscr{A}')$ messbarer Raum, $f : \Omega \to \Omega'$ messbar.

$$\mathscr{A}' \ni A' \mapsto \mu\big(f^{-1}(A')\big)$$

ist ein Maß auf $(\Omega', \mathscr{A}')$, es heißt das *Bildmaß* von μ unter f und wird mit $\mu \circ f^{-1}$ bezeichnet (manchmal schreibt man auch $f(\mu)$).

(auch: $f_*(\mu)$)

1.3.1 Erinnerung: Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation

Definition 1.50. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ W'raum, $(S, \mathscr{A})$ messbarer Raum. $A \in \mathscr{F}$ heißen *Ereignisse*, eine ($\mathscr{F}$-$\mathscr{A}$-)messbare Abbildung $X : \Omega \to S$ heißt eine *Zufallsvariable* (mit Werten in S), oft kürzt man Zufallsvariable als ZV ab, auch die Benennung *Zufallsgröße* ist verbreitet.

Für $B \in \mathscr{A}$ schreibt man

$$\{X \in B\} := X^{-1}(B) \quad (\in \mathscr{F})$$

für das Ereignis „X nimmt einen Wert in B an“.

Das Bildmaß $\mathbb{P} \circ X^{-1}$ heißt die *Verteilung* von X, man schreibt auch $\mathscr{L}(X)$ und $X \sim \mu$, falls $\mathbb{P} \circ X^{-1} = \mu$.

Beispiel 1.51. 1. μ W'maß auf $(S, \mathscr{A})$, so ist $X = \mathrm{Id}_S$ ZV auf $(S, \mathscr{A}, \mu)$ mit $X \sim \mu$. Insbesondere ist $U := \mathrm{Id}_{[0,1]}$ eine uniform auf $[0,1]$ verteilte ZV auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda_{[0,1]})$.

2. F Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$, so gibt es eine ZV X auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathbb{P})$, $\mathbb{P} = \lambda_{[0,1]}$, mit $\mathbb{P}(X \le x) = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(siehe z.B. Einf. i.d. Stoch. WS 20/21, Beob. 1.38)

(Erinnerung: $F^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}$, $F^{-1}(U) =: X$ leistet das Gewünschte

Kapitel 2

Unabhängigkeit

Definition 2.1. $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ W'raum.

1. $\mathscr{C}_i \subset \mathscr{F}$, $i \in I$ (I beliebige Indexmenge) heißen *unabhängig*, wenn für jedes endliche $J \subset I$, $J \neq \varnothing$
$$\text{für beliebige } A_j \in \mathscr{C}_j,\ j \in J \ \text{ gilt } \ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

2. Ereignisse $A_i \in \mathscr{F}$, $i \in I$ heißen unabhängig, wenn dies für $\mathscr{C}_i := \{\varnothing, A_i, A_i^c, \Omega\}$ gilt. $\left(= \sigma(\{A_i\})\right)$
3. ZVn X_i, $i \in I$ heißen unabhängig, wenn $\sigma(X_i)$, $i \in I$ unabhängig sind.

Lemma 2.2. *$\mathscr{C}_i \subset \mathscr{F}$, $i \in I$, $\mathscr{C}_i \cup \{\varnothing\}$ seien $\cap$-stabil. Dann gilt*

$$(\mathscr{C}_i, i \in I) \text{ u.a. } \quad \text{g.d.w.} \quad (\sigma(\mathscr{C}_i), i \in I) \text{ u.a.}$$

„$\Leftarrow$": ✓

„$\Rightarrow$": Zeige: $J \subset J' \subset I$, $|J'| < \infty$, so gilt

$(*)$ $\quad P\left(\bigcap_{j \in J'} A_j\right) = \prod_{j \in J'} P(A_j)$ wenn $\begin{cases} A_j \in \sigma(\mathscr{C}_j), j \in J \\ A_j \in \mathscr{C}_j, j \in J' \setminus J \end{cases}$

per Induktion nach $|J| = n$.

Für $n = 0$ gilt $(*)$ nach Vor.

Ang., $(*)$ gälte für alle $J \subset I$ mit $|J| = n$.

Betr. $\tilde{J} = J \cup \{j_0\}$ mit $|J| = n$, $j_0 \notin J$ $(j_0 \in I)$, $J \subset J' \subset I$

Sei $A_j \in \sigma(\mathscr{C}_j)$, $j \in J$, $A_j \in \mathscr{C}_j$, $j \in J' \setminus \tilde{J}$, betr.

Satz 1.18

$\mu(A) := P\left(A \cap \bigcap_{j \in J' \setminus \{j_0\}} A_j\right)$, $\tilde{\mu}(A) := P(A) \cdot \prod_{j \in J' \setminus \{j_0\}} P(A_j)$

μ und $\tilde{\mu}$ sind (endl.) Maße, für $A \in \mathscr{C}_{j_0}$ gilt $\mu(A) = \tilde{\mu}(A)$

$\Rightarrow \mu(A) = \tilde{\mu}(A)$ für $A \in \sigma(\mathscr{C}_{j_0})$ (ebenso für $A = \varnothing$ oder $A = \Omega$)

Somit: $(*)$ gilt für $n+1$.

Bemerkung 2.3. 1. $\mathscr{F} \ni A_i, i \in I$ sind u.a. gd.w.

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j) \quad \text{für jedes endliche } J \subset I.$$

2. $\mathscr{C}_i \subset \mathscr{F}, i \in I$ u.a., $I = \dot\bigcup_{k\in K} I_k$ (wobei K eine beliebige Menge ist), so sind auch

$$\widetilde{\mathscr{C}}_k := \bigcup_{i\in I_k} \mathscr{C}_i, \quad k \in K \quad \text{unabhängig.}$$

(Zu 1.: Beachte: $\{A_i\}$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\sigma(A_i)$.

Zu 2.: Seien $k_1, \dots, k_n$ paarw. Indizes, $A_j \in \widetilde{\mathscr{C}}_{k_j}$, dann gibt es $i_1, \dots, i_n$ mit $A_j \in \mathscr{C}_{i_1}$ und diese müssen paarw. versch. sein.)

Beispiel. 1) $X_1, X_2, \ldots, X_d$ reellwertige ZVn sind u.a. g.d.w.

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{d}\{X_j \le x_j\}\Big) = \prod_{j=1}^{d}\mathbb{P}(X_j \le x_j) \quad \text{für alle } x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

(denn $\{(-\infty, x_j]\}$ sind $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)

(d.h. g.d.w. ihre gemeinsame Verteilungsfunktion Produktgestalt hat).

2) X_i, $i \in I$ diskrete ZVn, d.h. $X_i : \Omega \to S_i$ messbar (wobei S_i endlich oder abzählbar, mit σ-Algebra $\mathscr{A} = 2^{S_i}$).

$(X_i, i \in I)$ unabhängig g.d.w.

$$\text{für } J \subset I, |J| < \infty,\ x_j \in S_j \text{ gilt } \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J}\{X_j = x_j\}\Big) = \prod_{j\in J}\mathbb{P}(X_j = x_j).$$

(denn $\{\{x\} : S_j \ni x\} \cup \{\emptyset\}$ ist $\cap$-stabiler Erzeuger von 2^{S_i})