

2.1 Asymptotische Ereignisse

In diesem Abschnitt geht es um Ereignisse, die gewissermaßen (wenn man bei der Nummerierung an einen Zeitablauf denkt) „unendlich spät“ entschieden werden.

Definition 2.4. Seien $A_1, A_2, \dots$ Ereignisse,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

(„unendlich viele der A_n treten ein“),

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} A_m$$

(„von einem (möglicherweise zufälligen) Index ab treten alle A_n ein“).

Beachte: Es ist $\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right)^c = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c$, also mit Indikatorvariablen ausgedrückt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(\omega), \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\liminf_n A_n}(\omega).$$

Lemma 2.5 (Lemma von Borel-Cantelli¹). Seien $A_1, A_2, \dots$ Ereignisse, $A = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \implies P(A) = 0$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \text{ und die } A_1, A_2, \dots \text{ seien unabhängig} \implies P(A) = 1$$

Bew.: 1. $P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \geq n} A_m\right) \leq P\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right)$ ← für jedes n

$$\implies P(A) = 0. \quad \leq \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$2. \quad P\left(\bigcap_{m \geq n} A_m^c\right) = \lim_{n' \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{m=n}^{n'} A_m^c\right) = \lim_{n' \rightarrow \infty} \prod_{m=n}^{n'} (1 - P(A_m))$$

$$= \lim_{n' \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{m=n}^{n'} \log(1 - P(A_m))\right) = \lim_{n' \rightarrow \infty} e^{-\sum_{m=n}^{n'} P(A_m)}$$

$$\underbrace{\log(1-x) \leq -x}_{\leq -P(A_m)} \quad \underbrace{e^{-\sum_{m=n}^{n'} P(A_m)}}_{= e^{-\infty} (=0)}$$

$$(\log(1-x) \leq -x) \implies P(A^c) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} A_m^c\right) = 0$$

¹nach Émile Borel (1871–1956) und Francesco Cantelli (1875–1966)

Beispiel 2.6. Seien $X_1, X_2, \dots$ u.a. $\{0, 1\}$ -wertig mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i \in (0, 1)$, so gilt

$$\{X_i = 1 \text{ } \infty\text{-oft}\} \text{ f.s. g.d.w. } \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty.$$

Anmerkung: Wenn $A_1, A_2, \dots$ nicht unabhängig sind und $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$, dann ist

$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \in (0, 1)$ möglich.

z.B. $A_1 = A_2 = A_3 = \dots$ mit $\mathbb{P}(A_1) \in (0, 1)$,
dann dann ist $A_1 = \limsup_n A_n$

Definition 2.7. $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots \subset \mathcal{A}$ Teil- σ -Algebren.

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{T}_n \quad \text{mit } \mathcal{T}_n := \sigma(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{A}_{n+2}, \dots)$$

heißt die (von der Folge $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ erzeugte) *terminale σ -Algebra*.

Beispiel 2.8. X_n reellwertige ZVn (auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), $\mathcal{A}_n = \sigma(X_n)$. Dann sind

$$\{\limsup_n X_n \leq c\}, \{(X_n) \text{ konvergiert}\} = \{\liminf_n X_n \geq \limsup_n X_n\},$$

$$\left\{ \sum_n |X_n| < \infty \right\}, \left\{ \sum_n X_n \text{ konvergiert} \right\} \in \mathcal{T}.$$

z.B.

$$\{\limsup_n X_n > c\} = \bigcap_n \underbrace{\bigcup_{m \geq n} \{X_m > c\}}_{\in \mathcal{T}_n} \in \mathcal{T}$$

$$- \liminf_n (-X_n) = \limsup_n X_n$$

sonit $\limsup_n X_n$ und $\liminf_n X_n$ sind $\mathcal{T}$ -messbare ZV

$$\Rightarrow \{\limsup_n X_n \leq \liminf_n X_n\} \in \mathcal{T}$$

Definition 2.7. $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots \subset \mathcal{A}$ Teil- σ -Algebren.

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{T}_n \quad \text{mit } \mathcal{T}_n := \sigma(\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{A}_{n+2}, \dots)$$

heißt die (von der Folge $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$ erzeugte) *terminale σ -Algebra*.

Beispiel 2.8. X_n reellwertige ZVn (auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), $\mathcal{A}_n = \sigma(X_n)$. Dann sind

$$\{\limsup_n X_n \leq c\}, \{(X_n) \text{ konvergiert}\} = \{\liminf_n X_n \geq \limsup_n X_n\},$$

$$\left\{ \sum_n |X_n| < \infty \right\}, \left\{ \sum_n X_n \text{ konvergiert} \right\} \in \mathcal{T}.$$

(insbes.:

$$\mathcal{T}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |X_m| < \infty \iff \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{m=n}^{\infty} |X_m| < \infty$$

$$\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} |X_m| < \infty \right\}$$

$$\left\{ \sum_{m=n}^{\infty} |X_m| < \infty \right\} \in \mathcal{T}_n$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=n}^{\infty} |X_m| < \infty \right\} \in \bigcap_n \mathcal{T}_n = \mathcal{T}$$

Satz 2.9 (Kolmogorovs 0-1-Gesetz). $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ W'raum, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots \subset \mathcal{A}$ (unter $\mathbb{P}$) unabhängige Teil- σ -Algebren. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{I}.$$

(Man sagt: „ $\mathcal{I}$ ist trivial“).

Bew.: $\sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) =: \sigma_n$ ist unabh. von

$$\sigma(\mathcal{A}_{n+1}, \mathcal{A}_{n+2}, \dots) =: \mathcal{I}_{n+1}$$

$\Rightarrow \sigma_n$ und $\mathcal{I}$ sind u.a. für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n =: \sigma_{\infty} \quad \text{erzeugt} \quad \sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots),$$

σ_{∞} ist $\cap$ -stabil $(A, B \in \sigma_{\infty} \Rightarrow \exists n, n' \text{ mit } A \in \sigma_n, B \in \sigma_{n'})$

σ_{∞} und $\mathcal{I}$ sind u.a. $\Rightarrow A, B \in \sigma_{n \vee n'} \Rightarrow A \cap B \in \sigma_{n \vee n'} \subset \sigma_{\infty}$

$\Rightarrow$ Lemma 2.2. $\mathcal{I}$ und $\sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots)$ sind u.a.

insbes.: $A \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2 \quad \square$

Beispiel. Seien $X_1, X_2, \dots$ u.a. reelle ZVn, dann ist $\mathbb{P}(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergiert}) \in \{0, 1\}$.

Kapitel 3

Integral und Erwartungswert

Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

Notation. Für $f, g : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, $z \in \overline{\mathbb{R}}$ schreiben wir

$$\begin{aligned}\{f \in A\} &:= f^{-1}(A), & \{f = z\} &:= f^{-1}(\{z\}), \\ \{f = g\} &:= \{x \in S : f(x) = g(x)\} = (f - g)^{-1}(\{0\}), \\ \{f \geq g\} &:= \{x \in S : f(x) \geq g(x)\} = (f - g)^{-1}([0, \infty]), & \text{etc.}\end{aligned}$$

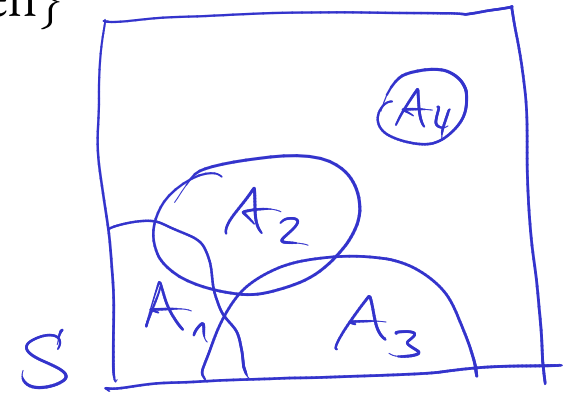
Definition und Beobachtung 3.1 (Elementares Integral). Für

$$f \in \mathcal{E}^+ := \{\text{nicht-negative elementare Funktionen}\}$$

mit Darstellung $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ ($a_i \in \mathbb{R}_+$, $A_i \in \mathcal{A}$) ist

$$I(f) := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) \stackrel{(*)}{=} \sum_{z \in f(S)} z \mu(\{f = z\})$$

(mit Konvention $0 \cdot \infty = 0$) wohldefiniert. *Zeige (*) :*



Sei $\{C_1, C_2, \dots, C_m\} = \left\{ \bigcap_{j=1}^n B_j : B_j = A_j \text{ oder } B_j = A_j^c \right\} \setminus \{\emptyset\}$,
 die C_k sind paarw. disj., $\bigcup_{k=1}^m C_k = S$,

für jedes $1 \leq i \leq n$ gibt es $J_i \subset \{1, \dots, m\}$ mit $A_i = \bigcup_{k \in J_i} C_k$

Für $x \in C_k$ ist $f(x) = \sum_{i: J_i \ni k} a_i =: \gamma_k$, $\{\gamma_k : k=1, \dots, m\}$

$$G_j := \{k \in \{1, \dots, m\} : \gamma_k = z_j\}.$$

$$\sum_i a_i \mu(A_i) = \sum_i \sum_{k \in J_i} a_i \mu(C_k) = \sum_k \mu(C_k) \sum_{i: J_i \ni k} a_i \stackrel{= \gamma_k}{=} \sum_j z_j \mu\left(\bigcup_{k \in G_j} C_k\right) \stackrel{= \{f=z_j\}}{=} \sum_j z_j \mu(\{f = z_j\})$$

Definition 3.2. Für $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt

$$\int f \, d\mu := \sup \{ I(h) : h \in \mathcal{E}^+, h \leq f \}$$

das Integral^I von f bezüglich μ .

(Manchmal schreibt man auch $\mu(f) := \int f \, d\mu$ oder auch $\int f(x) \mu(dx)$, wenn die „Integrationsvariable“ betont werden soll.)

^IPräziser: das Lebesgue-Integral, nach Henri Lebesgue (1875–1941)