7.4 $\mathcal{L}^2$-Martingale

Bemerkung 7.32. Sei $(X_n)_n$ ein Martingal und $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, sodass $\mathbb{E}[\varphi(X_n)]$ für alle n existiert. Dann ist $(\varphi(X_n))_n$ ein Submartingal, denn

$$\mathbb{E}[\varphi(X_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n] \overset{\text{Jensen-Ungl.}}{\geq} \varphi(\underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n]}_{\geq X_n}) \overset{(\geq)}{=} \varphi(X_n).$$

Die Aussage gilt ebenso, wenn $(X_n)_n$ ein Submartingal und φ konvex und nicht fallend ist.

Bericht 7.33. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn sie die Mittelwerteigenschaft besitzt:

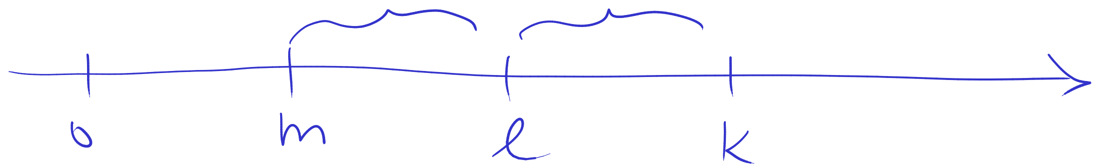
$$f(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(y)\,dy \quad \forall x \in \mathbb{R}, a > 0$$

(man fordert auch, dass f lokal beschränkt und messbar ist, so dass die Integrale stets existieren).
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *subharmonisch*, wenn $f(x) \leq \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(y)\,dy$ und *superharmonisch*, wenn $f(x) \geq \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(y)\,dy$ für alle $x \in \mathbb{R}, a > 0$.
Man kann zeigen: Auf $\mathbb{R}$ sind genau die konvexen Funktionen subharmonisch, zusammen mit Bemerkung 7.32 motiviert dies den Namen Submartingal (und entsprechend auch den Namen Supermartingal).

(Falls $f \in C^2(\mathbb{R})$ und konvex $\Rightarrow f''(x) \geq 0$:

$$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(x) + \cancel{(y-x)f'(x)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(y-x)^2 f''(\theta_{x,y})}_{\geq 0}\,dy \geq f(x)$$

Beobachtung 7.34. Sei $(X_n)_n$ ein quadratintegrables Martingal, d.h. $X_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbb{E}[(X_k - X_l)(X_l - X_m)] = 0$ für alle $0 \le m \le l \le k$.



$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(X_k - X_l)\cdot(X_l - X_m)] \\
&= \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[(X_k - X_l)(X_l - X_m) \mid \mathcal{F}_l]}_{}] = 0 \\
&\qquad = \underbrace{\mathbb{E}[X_k - X_l \mid \mathcal{F}_l]}_{}\cdot(X_l - X_m) \\
&\qquad\quad = \mathbb{E}[X_k \mid \mathcal{F}_l] - X_l = X_l - X_l = 0
\end{aligned}$$

$\lrcorner$

Erinnerung (vgl. Beob. 3.27). $\|X\|_2 := \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}$ ist eine Norm und $\langle X, Y\rangle := \mathbb{E}[XY]$ ist ein Skalarprodukt, $\mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ ist ein Hilbertraum (wenn man $\mathbb{P}$-f.s.-Gleichheit „herausfaktorisiert“).

Man spricht Beob. 7.34 auch aus als: „Martingalinkremente über disjunkte Zeitintervalle sind orthogonal.“

Lemma und Definition 7.35. *Sei $(X_n)_n$ ein quadratintegrables Martingal.*

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}]$$

ist der eindeutig bestimmte previsible Prozess mit $A_0 := 0$, sodass $(X_n^2 - A_n)_n$ ein Martingal ist. Man schreibt auch $(\langle X\rangle_n)_n = (A_n)_n$. $\langle X\rangle$ heißt quadratische Variation *von X. (In der Literatur werden auch folgende Namen verwendet: Wachsender Prozess, previsible quadratische Variation, Spitzklammerprozess von X.)*

Insbesondere: $\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[\langle X\rangle_n] = \mathbb{E}[X_0^2] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2]$ und

$$\sup_n \mathbb{E}[X_n^2] < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_n \mathbb{E}[\langle X\rangle_n] < \infty.$$

Bew.:

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2 - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2 + 2X_n(X_{n+1} - X_n) + X_n^2 - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]$$

$$= \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2 \mid \mathcal{F}_n] + 2X_n \underbrace{\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n]}_{=0} + X_n^2 - A_{n+1}$$

$$= X_n^2 - A_n.$$

Eindeutigk. folgt aus Eind.k. d. Doob-Zerl. (vgl. Def. 7.30)

Satz 7.36. *Sei $(M_n)_n$ ein $\mathcal{L}^2$-Martingal. Dann gilt:*

i) $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\} \overset{f.s.}{\subset} \left\{\lim_{n\to\infty} M_n \textit{ existiert}\right\}$.

ii) Wenn $|M_n - M_{n-1}| \le c$ für alle n für ein $c < \infty$, so gilt auch

$$\left\{\lim_{n\to\infty} M_n \textit{ existiert}\right\} \overset{f.s.}{\subset} \{\langle M\rangle_\infty < \infty\}.$$

iii) $\{\langle M\rangle_\infty = \infty\} \overset{f.s.}{\subset} \left\{\frac{M_n}{\langle M\rangle_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right\}$.

$(M_n^2 - \langle M\rangle_n)_{n=0,1,\dots}$ ist Martingal.

$\langle M\rangle_n \le \langle M\rangle_{n+1} \le \dots$

$\langle M\rangle_\infty := \lim_{n\to\infty} \langle M\rangle_n$

insbes.: $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\} = \{\sup_n \langle M\rangle_n < \infty\}$

Bemerkung 7.37. iii) impliziert das Starke Gesetz der großen Zahlen für $M_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ mit Y_i unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{E}[Y_1] = 0$ und $\mathrm{Var}[Y_1] < \infty$.

$(\mathcal{F}_k = \sigma(Y_1, \dots, Y_k))$ (dies erfüllt

$$\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{\mathbb{E}[(\underbrace{M_k - M_{k-1}}_{=Y_k})^2 | \mathcal{F}_{k-1}]}_{=\mathbb{E}[Y_k^2]} = n \cdot \mathbb{E}[Y_1^2]$$

Lemma 7.38 (Kroneckers Lemma). *Sei* $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ *mit* $s_k = \sum_{n=1}^k x_n \to s_\infty \in \mathbb{R}$. *Ist* $0 \le b_n \nearrow \infty$, *dann gilt* $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n b_k x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Gedanke: mit $s_0 = 0$

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{b_k \overbrace{x_k}^{=(s_k - s_{k-1})}}_{b_k s_k - b_k s_{k-1}} = s_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)s_k$$

$$= \underbrace{\underbrace{s_n}_{\to s_\infty} - \underbrace{\frac{b_n-b_1}{b_n}}_{\to 1} s_\infty}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} - \underbrace{\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)(s_k - s_\infty)}_{\limsup\{\dots\}}$$

$$\limsup\{\dots\} \le \underbrace{\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n_0-1}\dots}_{=0} + \underbrace{\sup_{k\ge n_0}|s_k - s_\infty|}_{\xrightarrow[n_0\to\infty]{} 0} \quad \blacksquare$$

Bew. v. Satz 7.36 i) z.z. $\{\langle M\rangle_\infty < \infty\} \underset{f.s.}{\subset} \{M_n \text{ konv.}\}$ ✓

Sei $S_k := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \langle M\rangle_{n+1} > k\}$ $(k \in \mathbb{N})$,

dies ist eine Stoppzeit (denn $\langle M\rangle_\cdot$ ist previsibel),

mit möglichem Wert $+\infty$.

$(M^2_{n\wedge S_k} - \langle M\rangle_{n\wedge S_k})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Martingal (vgl. Lemma 7.18)

$$\Rightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[M^2_{n\wedge S_k}] = \mathbb{E}[M_0^2] + \sup_n \mathbb{E}[\underbrace{\langle M\rangle_{n\wedge S_k}}_{\leq k}]$$
$$\leq \mathbb{E}[M_0^2] + k < \infty$$

$\Rightarrow (M_{n\wedge S_k})_n$ ist $\mathcal{L}^2$-beschr. Martingal $\Rightarrow (M_{n\wedge S_k})_n$ konv. (für $n\to\infty$) f.s.

$\{\langle M\rangle_\infty < \infty\} = \bigcup_{k=1}^\infty \{S_k = \infty\}$ und

$\bigcup_{k=1}^\infty \{S_k = \infty, M_{n\wedge S_k} \text{ konv.}\} = \bigcup_{k=1}^\infty \{S_k = \infty, M_n \text{ konv.}\}$

zu ii) Es gelte $|M_n - M_{n-1}| \leq c$, z.z. $\{M_n \text{ konv.}\} \underset{f.s.}{\subset} \{\langle M\rangle_\infty < \infty\}$ ✓

Sei $K > 0$; $T_K := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : |M_n| > K\}$

ist Stoppzeit (ggfs. mit Wert $+\infty$).

$$\mathbb{E}[\underbrace{M^2_{n\wedge T_K}}_{|\dots| \leq (K+c)^2} - \langle M\rangle_{n\wedge T_K}] = \mathbb{E}[M_0^2]$$

$$\mathbb{E}[\langle M\rangle_{n\wedge T_K}] \leq (K+c)^2$$ mit monotoner Konv.:

$$\mathbb{E}(\langle M\rangle_{T_K}] < \infty$$

$$\Rightarrow \langle M\rangle_{T_K} < \infty \ (f.s.)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\underbrace{\{\lim_n M_n \text{ existiert}\}}_{\subset \bigcup_{K=1}^{\infty}\{T_K = \infty\}} \cap \{\langle M\rangle_\infty = \infty\}) \leq \sum_{K=1}^{\infty} \overbrace{\mathbb{P}(T_K = \infty, \underbrace{\langle M\rangle_{T_K}}_{=\langle M\rangle_\infty} = \infty)}^{=0}$$

zu iii) z.z. $\{ \langle M \rangle_\infty = \infty \} \underset{f.s.}{\subset} \left\{ \frac{M_n}{\langle M \rangle_n} \longrightarrow 0 \right\}$

$$W_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k - M_{k-1}}{1 + \langle M \rangle_k} = \left((1 + \langle M \rangle_\circ)^{-1} \right) \bullet M$$

$(W_n)_n$ ist ein Martingal.

$$\mathbb{E}\left[(W_n - W_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] = \frac{1}{(1 + \langle M \rangle_n)^2} \underbrace{\mathbb{E}\left[(M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1} \right]}_{= \langle M \rangle_n - \langle M \rangle_{n-1}}$$

$$\leq \frac{\langle M \rangle_n - \langle M \rangle_{n-1}}{(1 + \langle M \rangle_n) \cdot (1 + \langle M \rangle_{n-1})} = \frac{(\langle M \rangle_n + 1) - (\langle M \rangle_{n-1} + 1)}{(1 + \langle M \rangle_n) \cdot (1 + \langle M \rangle_{n-1})}$$

$$= \frac{1}{1 + \langle M \rangle_n} - \frac{1}{1 + \langle M \rangle_{n-1}}$$

$$\Longrightarrow \langle W \rangle_\infty = \lim_{m \to \infty} \langle W \rangle_m = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[(W_n - W_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1} \right] \leq 1$$

$\overset{i)}{\Longrightarrow}$ W_n konvergiert (f.s.). Setze $b_n = 1 + \langle M \rangle_n$, $X_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{1 + \langle M \rangle_n}$

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k X_k = (1 + \langle M \rangle_n)^{-1} \cdot M_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{(Kroneckers Lemma)}$$

$\blacksquare$

Im Folgenden sei $(X_n)_n$ ein stochastischer Prozess mit Werten in $\mathbb{R}$ und

$$X_n^* := \max_{0\le k\le n} X_k, \qquad |X|_n^* := \max_{0\le k\le n} |X_k|.$$

Lemma 7.39. *Sei $(X_n)_n$ ein Submartingal und $\lambda \ge 0$. Dann gilt*

$$\lambda\mathbb{P}(X_n^* \ge \lambda) \le \mathbb{E}\big[X_n \mathbf{1}_{\{X_n^*\ge\lambda\}}\big] \le \mathbb{E}\big[|X_n|\mathbf{1}_{\{X_n^*\ge\lambda\}}\big] \; (\le \mathbb{E}[|X_n|]).$$

Sei $T := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : X_k \ge \lambda\} \wedge n$, ist Stoppzeit, ist beschränkt.

$$\mathbb{E}[X_T] \overset{\text{Kor. 7.19}}{\le} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{X_n^* \ge \lambda\}}] + \mathbb{E}[\cancel{X_n \mathbb{1}_{\{X_n^* < \lambda\}}}]$$

$$\| $$

$$\underbrace{\mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_{\{X_n^* \ge \lambda\}}]}_{\ge \lambda \cdot \mathbb{P}(X_n^* \ge \lambda)} + \mathbb{E}[\cancel{\underbrace{X_T \mathbb{1}_{\{X_n^* < \lambda\}}}_{= X_n \cdot \mathbb{1}_{\{X_n^* < \lambda\}}}}]$$

Satz 7.40 (Doobs $\mathcal{L}^p$-Ungleichungen)**.** *Sei $(X_n)_n$ ein Martingal oder ein nichtnegatives Submartingal.*

i) Für $p \geq 1$ und $\lambda > 0$ gilt $\lambda^p \mathbb{P}(|X|_n^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[|X_n|^p]$.

ii) Für $p > 1$ gilt $\mathbb{E}[|X_n|^p] \leq \mathbb{E}[(|X|_n^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_n|^p]$.

Bemerkung. Für ein $\mathcal{L}^2$-Martingal gestattet dies, $\mathbb{E}[(|X|_n^*)^2]$ durch $\mathbb{E}[\langle X \rangle_n]$ zu kontrollieren, denn $\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[\langle X \rangle_n]$.