## 4.1 Fluktuationen von Summen unabhängiger Zufallsvariablen

**Satz 4.8** (Kolmogorov-Ungleichungen)**.** $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ *unabhängig,* $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. *Es gilt für* $x > 0$

$$\mathbb{P}\Big( \max\{S_k : 1 \le k \le n\} \ge x \Big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2 + \mathrm{Var}[S_n]} \tag{4.2}$$

$$\mathbb{P}\Big( \max\{|S_k| : 1 \le k \le n\} \ge x \Big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2} \tag{4.3}$$

(Erinnerung:

$\mathbb{P}(S_n \ge x) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2}$ Chebyshev-Ungl.)

## 4.1 Fluktuationen von Summen unabhängiger Zufallsvariablen

**Satz 4.8** (Kolmogorov-Ungleichungen). *$X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ unabhängig, $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Es gilt für $x > 0$*

$$(*) \qquad \mathbb{P}\big(\max\{S_k : 1 \le k \le n\} \ge x\big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2 + \mathrm{Var}[S_n]} \tag{4.2}$$

$$\mathbb{P}\big(\max\{|S_k| : 1 \le k \le n\} \ge x\big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2} \tag{4.3}$$

beachte: $A_k \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_k)$

Bew.: Zu $(*)$. $A_k := \{S_1, S_2, \dots, S_{k-1} < x,\ S_k \ge x\}$, $k = 1, \dots, n$,

d.h. $A := \{\max_{k \le n} S_k \ge x\} = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k$.

$\mathbb{E}[2 S_n \cdot c] = 0$

Sei $c > 0$.

$$\mathrm{Var}[S_n] + c^2 = \mathbb{E}[S_n^2 + c^2] = \mathbb{E}[(S_n + c)^2] \ge \mathbb{E}[(S_n + c)^2 \mathbb{1}_A]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(S_n + c)^2 \mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big[\big((S_k + c)^2 + 2(S_k + c)(S_n - S_k) + \underbrace{(S_n - S_k)^2}_{\ge 0}\big)\mathbb{1}_{A_k}\big]$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} \Big\{\mathbb{E}[(S_k + c)^2 \mathbb{1}_{A_k}] + 2\,\underbrace{\mathbb{E}[(S_k + c)\mathbb{1}_{A_k} \cdot (\underbrace{S_n - S_k}_{= X_{k+1} + \dots + X_n})]}_{0 = \mathbb{E}[(S_k + c)\mathbb{1}_{A_k}] \cdot \mathbb{E}[S_n - S_k] =}\Big\}$$

## 4.1 Fluktuationen von Summen unabhängiger Zufallsvariablen

**Satz 4.8** (Kolmogorov-Ungleichungen). $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ *unabhängig,* $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. *Es gilt für* $x > 0$

$$(*) \qquad \mathbb{P}\big(\overbrace{\max\{S_k : 1 \le k \le n\} \ge x}^{=A}\big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2 + \mathrm{Var}[S_n]} \tag{4.2}$$

$$\mathbb{P}\big(\max\{|S_k| : 1 \le k \le n\} \ge x\big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2} \tag{4.3}$$

also:

$$\mathrm{Var}[S_n] + c^2 \ge \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big[\underbrace{(S_k + c)^2 \mathbb{1}_{A_k}}_{\ge (x+c)^2 \mathbb{1}_{A_k}}\big] \ge (x+c)^2 \underbrace{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)}_{= P(A)}$$

$$\Longrightarrow P(A) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n] + c^2}{(x+c)^2}.$$

Wahl von $c = \mathrm{Var}(S_n]/x$ liefert $(*)$.

## 4.1 Fluktuationen von Summen unabhängiger Zufallsvariablen

**Satz 4.8** (Kolmogorov-Ungleichungen). *$X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ unabhängig, $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Es gilt für $x > 0$*

$$\mathbb{P}\Big(\max\{S_k : 1 \le k \le n\} \ge x\Big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2 + \mathrm{Var}[S_n]} \tag{4.2}$$

(**)

$$\mathbb{P}\Big(\max\{|S_k| : 1 \le k \le n\} \ge x\Big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2} \tag{4.3}$$

✓

Zu (**): $\tilde{A} = \{\max\{|S_k| : 1 \le k \le n\} \ge x\} = \dot{\bigcup}_{k=1}^{n} \tilde{A}_k$

mit $\tilde{A}_k = \{|S_1|, |S_2|, \dots, |S_{k-1}| < x, |S_k| \ge x\}$

damit

$$\mathrm{Var}[S_n] \ge \mathbb{E}[S_n^2 \mathbb{1}_{\tilde{A}}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\underbrace{S_n^2}_{(S_k + S_n - S_k)^2} \mathbb{1}_{\tilde{A}_k}] \ge x^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} P(\tilde{A}_k)}_{= P(\tilde{A})}$$

$\lrcorner$

**Korollar 4.9.** $X_1, X_2, \ldots$ *u.a. mit* $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $c := \sup_n \mathrm{Var}[X_n] < \infty$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, *dann gilt für* $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}(\log n)^{1/2+\varepsilon}} = 0 \quad \textit{f.s.}$$

(Erinnerung: $X_i$ u.i.v., $\in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$, dann $\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n\,\mathrm{Var}[X_1]}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}_{0,1}$, ZGWS)

**Korollar 4.9.** *$X_1, X_2, \dots$ u.a. mit $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $c := \sup_n \mathrm{Var}[X_n] < \infty$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, dann gilt für $\varepsilon > 0$*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}(\log n)^{1/2+\varepsilon}} = 0 \quad f.s.$$

Bew.: Setze $k_n = 2^n$, $\ell(n) := \sqrt{n}\cdot(\log n)^{1/2+\varepsilon}$.

$$A_{n,\delta} := \{\max_{k\le k_n} |S_k| > \delta\, \ell(k_n)\} \quad (\text{für } \delta > 0)$$

$$\sum_{n=1}^\infty P(A_{n,\delta}) \overset{\text{Satz 4.8}}{\le} \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathrm{Var}[S_{k_n}]}{\delta^2(\ell(k_n))^2} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{c k_n}{\delta^2(\sqrt{k_n}\cdot \log(k_n)^{1/2+\varepsilon})^2}$$

mit Borel-Cantelli:

$$= \frac{c}{\delta^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(\log k_n)^{1+2\varepsilon}} < \infty$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\max_{k\le k_n}\{|S_k|\}}{\ell(k_n)} \le \delta \text{ f.s., mit } \delta\downarrow 0 \text{ also: } \limsup_{n\to\infty} \frac{\max_{k\le k_n}\{|S_k|\}}{\ell(k_n)} = 0.$$

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{|S_m|}{\ell(m)} \le \limsup_{m\to\infty} \underbrace{\frac{\max\{|S_k| : k \le k_{\lceil \log_2 m\rceil}\}}{\ell(k_{\lceil \log_2 m\rceil})}}_{=0} \cdot \underbrace{\frac{\ell(k_{\lceil \log_2 m\rceil})}{\ell(m)}}_{\text{(ist glm. beschr.)}} = 0$$

$\square$

**Satz 4.10.** *1)* $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ *u.a,* $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}[X_n] < \infty$, *dann konvergiert* $\sum_{n=1}^\infty X_n$ *f.s.*

*2)* $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ *u.a, es gelte für ein* $a > 0$ *mit* $Y_n := X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \le a\}}$

*i)* $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(|X_n| > a) < \infty$

*ii)* $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}[Y_n] < \infty$

*iii)* $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}[Y_n] < \infty$

*Dann konvergiert* $\sum_{n=1}^\infty X_n$ *f.s.*

Somit: $W_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ f.s., d.h. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (f.s.) Cauchy-Folge.

zu 1) $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Satz 4.8

Fixiere $\varepsilon > 0$, $m < n$: $\mathbb{P}\left(\max_{m\le k\le n} |S_k - S_m| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \underbrace{\mathrm{Var}[S_n - S_m]}_{= \sum_{k=m+1}^n \mathrm{Var}[X_k]}$,

mit $n \to \infty$ folgt

$$\mathbb{P}\left(\max_{k\ge m} |S_k - S_m| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=m}^\infty \mathrm{Var}[X_k] \quad \left(\xrightarrow[m\to\infty]{} 0\right).$$

Setze $W_m := \sup_{k,l\ge m} \underbrace{|S_k - S_l|}_{(S_k - S_m) - (S_l - S_m)}$ (ist nicht-wachsend in $m$).

$$\mathbb{P}(W_m \ge 2\varepsilon) \le 2\,\mathbb{P}\left(\max_{k\ge m} |S_k - S_m| > \varepsilon\right) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

**Satz 4.10.** *1)* $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ *u.a,* $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}[X_n] < \infty$, *dann konvergiert* $\sum_{n=1}^\infty X_n$ *f.s.*

*2)* $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ *u.a, es gelte für ein* $a > 0$ *mit* $Y_n := X_n \mathbf{1}_{\{|X_n| \le a\}}$

*i)* $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\big(|X_n| > a\big) < \infty$

*ii)* $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}[Y_n] < \infty$

*iii)* $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{Var}[Y_n] < \infty$

*Dann konvergiert* $\sum_{n=1}^\infty X_n$ *f.s.*

zu 2)

$\sum_{n=1}^\infty (Y_n - \mathbb{E}[Y_n])$ konvergiert f.s. nach 1) zusammen mit Vor. iii),

nach Vor. ii) konvergiert $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}[Y_n]$,

also: $\sum_{n=1}^\infty Y_n$ konvergiert f.s.

f.s. $< \infty$

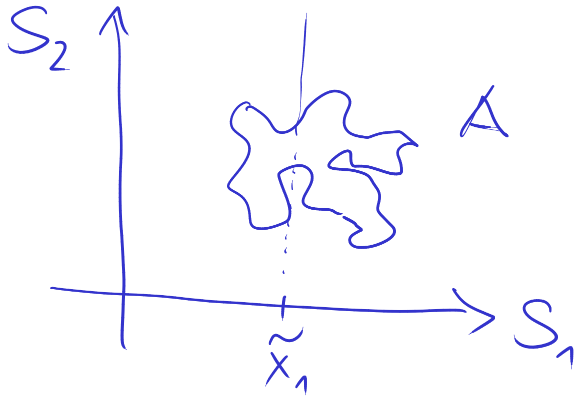
mit Vor. i) und Borel-Cantelli: $X_n = Y_n$ für alle $n \geq N_0$,

daher

**Beispiel.** $Z_1, Z_2, \ldots$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}_{0,1}$, $t \in \mathbb{R}$, $X_n := Z_n \frac{1}{n} \sin(n\pi t)$. $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ konvergiert fast sicher.

Denn: $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\mathrm{Var}[X_n] = \frac{1}{n^2} \sin^2(n\pi t) \cdot 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}[X_n] < \infty$$




# Kapitel 5

## Produktmaße und Übergangskerne

(die von $A_1 \times A_2$ mit $A_i \in \mathscr{A}_i$ erzeugte $\sigma$-Alg.)

**Lemma 5.1.** *Seien* $(S_1, \mathscr{A}_1)$ *und* $(S_2, \mathscr{A}_2)$ *messbare Räume,*

$$f : S_1 \times S_2 \to \overline{\mathbb{R}} \quad (\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)\text{-}(\mathcal{B}(\mathbb{R})\text{-})\textit{messbar}, \qquad A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2.$$

*Für* $\widetilde{x}_1 \in S_1, \widetilde{x}_2 \in S_2$ *gilt*

$$\begin{aligned}
&A_{\widetilde{x}_1} := \left\{x_2 \in S_2 : (\widetilde{x}_1, x_2) \in A\right\} \in \mathscr{A}_2 \\
&A_{\widetilde{x}_2} := \left\{x_1 \in S_1 : (x_1, \widetilde{x}_2) \in A\right\} \in \mathscr{A}_1 \\
&f_{\widetilde{x}_1} : S_2 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x_2 \mapsto f_{\widetilde{x}_1}(x_2) = f(\widetilde{x}_1, x_2) \quad \textit{ist } \mathscr{A}_2\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R})\textit{-messbar} \\
&f_{\widetilde{x}_2} : S_1 \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x_1 \mapsto f_{\widetilde{x}_2}(x_1) = f(x_1, \widetilde{x}_2) \quad \textit{ist } \mathscr{A}_1\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R})\textit{-messbar}
\end{aligned}$$

*Sei* $f \geq 0$, $\mu_i$ $\sigma$*-endliches Maß auf* $(S_i, \mathscr{A}_i)$ *(für* $i = 1, 2$*).*

$$\begin{aligned}
&I_1 : x_2 \mapsto \int_{S_1} f(x_1, x_2)\, \mu_1(dx_1) \quad \textit{ist } \mathscr{A}_2\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R})\textit{-messbar} \\
&I_2 : x_1 \mapsto \int_{S_2} f(x_1, x_2)\, \mu_2(dx_2) \quad \textit{ist } \mathscr{A}_1\text{-}\mathcal{B}(\mathbb{R})\textit{-messbar}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$f : S_1 \times S_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2)$-$(\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$)$messbar, $\quad A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2$,

$A_{\widetilde{x}_1} := \{x_2 \in S_2 : (\widetilde{x}_1, x_2) \in A\}$, $A_{\widetilde{x}_2} := \{x_1 \in S_1 : (x_1, \widetilde{x}_2) \in A\} \in \mathscr{A}_1$,

$f_{\widetilde{x}_1}(x_2) = f(\widetilde{x}_1, x_2)$, $f_{\widetilde{x}_2}(x_1) = f(x_1, \widetilde{x}_2)$

Bew.: $\pi_i : S_1 \times S_2 \longrightarrow S_i$ $(i = 1, 2)$ die Koordinatenprojektionen,

für $\tilde{x}_1 \in S_1$, $\imath : S_2 \longrightarrow S_1 \times S_2$ $(\imath(x_2) = (\tilde{x}_1, x_2))$
Einbettungsabb.

$\pi_1 \circ \imath : S_2 \longrightarrow S_1$ ist konstant $(\equiv \tilde{x}_1)$, insbes. messbar,

$\pi_2 \circ \imath : S_2 \longrightarrow S_2$ $(= id_{S_2})$ ist messbar

$A_{\tilde{x}_1} = \imath^{-1}(A) \in \mathscr{A}_2$, $f_{\tilde{x}_1} = f \circ \imath$ ist Komposition messbarer Abb., also messbar

Analog für $A_{\tilde{x}_2}$ und $f_{\tilde{x}_2}$.

$f \geq 0$, $\mu_i$ $\sigma$-endliches Maß auf $(S_i, \mathscr{A}_i)$, $i = 1, 2$

$$(*) \qquad I_1 : x_2 \mapsto \int_{S_1} f(x_1, x_2)\, \mu_1(dx_1), \qquad I_2 : x_1 \mapsto \int_{S_2} f(x_1, x_2)\, \mu_2(dx_2)$$

Betr. zunächst $\mu_1, \mu_2$ endl. Maße

$\mathcal{D} := \{ A \in \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 :$ $I_1$ aus $(*)$ ist messbare Fkt. $\}$.

$A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{D}$ ✓ wenn $A_i \in \mathscr{A}_i$ : $I_1(x_2) = \int_{S_1} \mathbb{1}_{A_1}(x_1) \mathbb{1}_{A_2}(x_2) \mu_1(dx_1)$

$= \mathbb{1}_{A_2}(x_2) \cdot \mu_1(A_1)$

Zeige: $\mathcal{D}$ ist Dynkin-System:

•) $S_1 \times S_2 \in \mathcal{D}$ ✓

•) Sei $A \in \mathcal{D}$ : $\underset{S_2}{\overset{\in}{x_2}} \mapsto \int \underbrace{\mathbb{1}_{A^c}(x_1, x_2)}_{= 1 - \mathbb{1}_A(x_1, x_2)} \mu_1(dx_1) = \mu_1(S_1) - \int \mathbb{1}_A(x_1, x_2) \mu_1(dx_1)$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$ ist messb.

•) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarw. disj., $A = \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n$ $\quad A \in \mathcal{D}$ ✓

$x_2 \mapsto \int \mathbb{1}_A(x_1, x_2) \mu_1(dx_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{A_n}(x_1, x_2) \mu_1(dx_1)$ $\Uparrow$ ist messbar

$f \geq 0$, $\mu_i$ $\sigma$-endliches Maß auf $(S_i, \mathscr{A}_i)$, $i = 1, 2$

$$I_1 : x_2 \mapsto \int_{S_1} f(x_1, x_2)\, \mu_1(dx_1), \qquad I_2 : x_1 \mapsto \int_{S_2} f(x_1, x_2)\, \mu_2(dx_2)$$

$\mathcal{D}$ ist Dynkin-System, enthält $\cap$-Stabilen von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$\underset{\text{Satz 1.14}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

Somit $I_1$ ist messbare Fkt. auf $S_2$, wenn $f = \mathbb{1}_A$,

approximiere allg. $f$ mittels Linearkomb. von Indikatorfkt.:

$2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor \wedge n \underset{n\to\infty}{\nearrow} f$, mit dom. Konv und obigen: $I_1$ ist messbar.

Falls $\mu_i$ (nur) $\sigma$-endl. sind:

$B_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} S_1$, $C_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} S_2$ mit $\mu_1(B_n) < \infty$, $\mu_2(C_n) < \infty$,

betr. $f_n(x_1, x_2) = \mathbb{1}_{B_n}(x_1) \mathbb{1}_{C_n}(x_2) f(x_1, x_2) \underset{n\to\infty}{\nearrow} f(x_1, x_2)$ $\square$