Im Folgenden sei $(X_n)_n$ ein stochastischer Prozess mit Werten in $\mathbb{R}$ und

$$X_n^* := \max_{0\le k\le n} X_k, \qquad |X|_n^* := \max_{0\le k\le n} |X_k|.$$

Lemma 7.39. *Sei $(X_n)_n$ ein Submartingal und $\lambda \ge 0$. Dann gilt*

$$\lambda \mathbb{P}(X_n^* \ge \lambda) \le \mathbb{E}\big[X_n \mathbf{1}_{\{X_n^*\ge\lambda\}}\big] \le \mathbb{E}\big[|X_n|\mathbf{1}_{\{X_n^*\ge\lambda\}}\big]\ (\le \mathbb{E}[|X_n|]).$$

Sei $T := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : X_k \ge \lambda\} \wedge n$, ist Stoppzeit, ist beschränkt.

$$\mathbb{E}[X_T] \overset{\text{Kor. 7.19}}{\le} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{X_n^*\ge\lambda\}}] + \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{\{X_n^*<\lambda\}}]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_{\{X_n^*\ge\lambda\}}]}_{\ge \lambda\cdot\mathbb{P}(X_n^*\ge\lambda)} + \mathbb{E}[\underbrace{X_T \mathbb{1}_{\{X_n^*<\lambda\}}}_{= X_n\cdot\mathbb{1}_{\{X_n^*<\lambda\}}}]$$

$\blacksquare$

Satz 7.40 (Doobs $\mathcal{L}^p$-Ungleichungen). *Sei $(X_n)_n$ ein Martingal oder ein nichtnegatives Submartingal.*

i) Für $p \geq 1$ und $\lambda > 0$ gilt $\lambda^p \mathbb{P}(|X|_n^* \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[|X_n|^p]$. ✓

ii) Für $p > 1$ gilt $\mathbb{E}[|X_n|^p] \leq \mathbb{E}[(|X|_n^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_n|^p]$. ✓

Bemerkung. Für ein $\mathcal{L}^2$-Martingal gestattet dies, $\mathbb{E}[(|X|_n^*)^2]$ durch $\mathbb{E}[\langle X \rangle_n]$ zu kontrollieren, denn $\mathbb{E}[X_n^2] = \mathbb{E}[X_0^2] + \mathbb{E}[\langle X \rangle_n]$. $(X_n^2 - \langle X \rangle_n)_n$ ist Mart.

Bew.: i) $(|X_n|^p)_{n=0,1,2,\dots}$ ist Submartingal

$(x \mapsto |x|^p$ ist konvex und auf $\mathbb{R}_+$ mon. wachsend$)$

mit Lemma 7.39:

$$\lambda^p \underbrace{\mathbb{P}((|X_n|^*)^p \geq \lambda^p)}_{= \mathbb{P}(|X_n|^* \geq \lambda)} \leq \mathbb{E}[|X_n|^p]$$

Zu ii) Sei $c>0$.

$$\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{p/(p-1)}=1}$$

$$\mathbb{E}[(|X|_n^*\wedge c)^p] = \mathbb{E}\Big[\int_0^{|X|_n^*\wedge c} p\lambda^{p-1}\,d\lambda\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\int_0^c p\lambda^{p-1}\mathbb{1}_{\{|X|_n^*\geq\lambda\}}\,d\lambda\Big]$$

Fubini

$$= \int_0^c p\lambda^{p-1}\underbrace{\mathbb{P}(|X|_n^*\geq\lambda)}_{\leq\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{\{|X|_n^*\geq\lambda\}}]}\,d\lambda$$

$$\leq \mathbb{E}\Big[\underbrace{p\int_0^c \lambda^{p-2}|X_n|\mathbb{1}_{\{|X|_n^*\geq\lambda\}}\,d\lambda}\Big]$$

$$= p\cdot|X_n|\cdot\int_0^{c\wedge|X|_n^*}\lambda^{p-2}\,d\lambda = \frac{p}{p-1}|X_n|(|X|_n^*\wedge c)^{p-1}$$

$$= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[(|X|_n^*\wedge c)^{p-1}\cdot|X_n|] \underset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{p-1}\left(\mathbb{E}[|X_n|^p]\right)^{1/p}\cdot\left(\mathbb{E}[(|X|_n^*\wedge c)^p]\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$c\to\infty$ und monotone Konv.: $\mathbb{E}[(|X|_n^*)^p] \leq \frac{p}{p-1}\mathbb{E}[|X_n|^p]^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}[(|X|_n^*)^p]\right)^{\frac{p-1}{p}}$ $\blacksquare$

Korollar 7.41 (eine Form der Kolmogorov-Ungleichung, vgl. Satz 4.8). *$X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ unabhängig, $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $S_n := X_1 + \dots + X_n$ ($S_0 := 0$). Es gilt für $x > 0$*

$$\mathbb{P}\Big(\max\{|S_k| : 1 \le k \le n\} \ge x\Big) \le \frac{\mathrm{Var}[S_n]}{x^2}.$$

(Denn $(S_n)_{n=0,1,\dots}$ ist Martingal (bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$ mit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$), dann verwende Doobs $\mathcal{L}^2$-Ungl.)

beachte: $\mathbb{E}[\langle X \rangle_n] = \mathbb{E}[S_n^2] = \mathrm{Var}[S_n] = n \cdot \mathrm{Var}[X_1]$

Anwendung:

Sei (M_n) $\mathcal{L}^2$-Martingal, $M_0 = 0$ und $\langle M \rangle_n \le c \cdot n$ für ein $c > 0$ (und alle n):

Für jedes $\varepsilon > 0$: $\dfrac{M_n}{\sqrt{n}\,(\log n)^{1/2+\varepsilon}} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0$ (vgl. Bew. von Korollar 4.9)

7.5 Zum Satz von Radon-Nikodým

Sei $(S, \mathscr{A})$ ein messbarer Raum, μ, ν Maße auf $(S, \mathscr{A})$. ν ist *absolut stetig* bezüglich μ, geschrieben $\nu \ll \mu$, wenn für jedes $A \in \mathscr{A}$ gilt

$$\mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = 0.$$

Wenn ν eine Dichte bezüglich μ besitzt ($\nu = h\mu$, also $\nu(A) = \int \mathbf{1}_A h \, d\mu$ mit einem $h : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ messbar, vgl. Def. 3.16), so gilt offenbar $\nu \ll \mu$.

Satz 7.42 (Eine Form des Satzes von Radon-Nikodým[3])**.** *Sei $(S, \mathscr{A})$ separabler messbarer Raum (d.h. $\mathscr{A} = \sigma(A_1, A_2, \dots)$ ist abzählbar erzeugt), μ, ν endliche Maße auf $(S, \mathscr{A})$ mit $\nu \ll \mu$. Dann gibt es ein $h \geq 0$, $h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $\nu = h\mu$.*

[3]Johann Radon, 1887–1956; Otton Nikodým, 1887–1974

Bew.: O.E. seien die beteiligten Maße W'maße

$$\left(P(\cdot) = \frac{\mu(\cdot)}{\mu(S)},\quad Q(\cdot) = \frac{\nu(\cdot)}{\nu(S)} \right),$$

zu zeigen: Es gibt $X \in \mathcal{L}^1(P)$, $X \geq 0$ mit $Q = XP$

$$\left(Q(A) = \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A \cdot X]\right)$$

Zeige: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit:

$$\forall B \in \mathcal{A}: \quad P(A) < \delta \implies Q(A) < \varepsilon \qquad (*)$$

Andernfalls gäbe es $B_n \in \mathcal{A}$ mit $P(B_n) \leq 2^{-n}$ und $\inf_n Q(B_n) =: \varepsilon_0 > 0$,

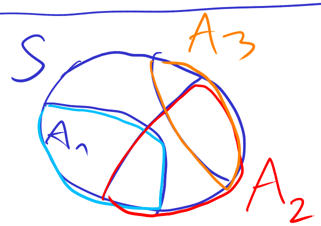
dann gälte: $C := \limsup_n B_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} B_m$

i) $P(C) = 0$ (Borel-Cantelli), ii) $Q(C) = \lim_{n \to \infty} Q\left(\bigcup_{m \geq n} B_m\right) \geq \varepsilon_0$

im ↯ zu $Q \ll P$.

N.Vor. ist $\mathcal{A} = \sigma(A_1, A_2, \dots)$, setze $\mathcal{F}_n := \sigma(A_1, \dots, A_n)$

$= \sigma(C_{n,1}, C_{n,2}, \dots, C_{n,m_n})$



mit $C_{n,i} \cap C_{n,j} = \emptyset$ für $i \neq j$ und $A_k = \bigcup_{i \in J_k} C_{n,i}$

$\forall B \in \mathcal{A}: \quad P(A) < \delta \implies Q(A) < \varepsilon \quad (*)$

$\mathcal{A} = \sigma(A_1, A_2, \dots)$, setze $\mathcal{F}_n := \sigma(A_1, \dots, A_n) = \sigma(C_{n,1}, C_{n,2}, \dots, C_{n,m_n})$

mit $C_{n,i} \cap C_{n,j} = \emptyset$

für $i \neq j$ und $A_k = \bigcup_{i \in J_k} C_{n,i}$

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{Q(C_{n,k})}{P(C_{n,k})}, & \omega \in C_{n,k} \text{ und } P(C_{n,k}) > 0 \\ 0, & \omega \in C_{n,k} \text{ und } P(C_{n,k}) = 0, \end{cases}$$

also $Q|_{\mathcal{F}_n} = X_n \cdot P|_{\mathcal{F}_n}$

$X_n \geq 0, \in \mathcal{L}^1(P)$, $\mathbb{E}_P\left[\sum_{k=1}^{n_m} \mathbb{1}_{C_{n,k}} X_n\right] = \sum_{k=1}^{n_m} \frac{Q(C_{n,k})}{P(\cancel{C_{n,k}})} \cdot P(\cancel{C_{n,k}}) = 1,$

X_n ist $\mathcal{F}_n$-messbar,

für $B \in \mathcal{F}_n$, d.h. $B = \dot\bigcup_{j \in J} C_{n,j}$ ist

$$\mathbb{E}_P[X_n \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}_P\left[\sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{C_{n,k}} X_n \mathbb{1}_B\right] = \sum_{j \in J} Q(C_{n,j}) = Q(B)$$

wie eben: für $B \in \mathcal{F}_n$ (beachte jedes $C_{n,j} = \dot{\bigcup}_{k \in J_{n,j}} C_{n+1,k}$)

$$\mathbb{E}_P[X_{n+1} \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}_P[X_n \mathbb{1}_B]$$

d.h. $\mathbb{E}_P[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$

d.h. $(X_n)_n$ ist Martingal (bzgl. P und $(\mathcal{F}_n)$)

zeige: $(X_n)_n$ ist gleichgr. intbar. (bzgl. P) ✓

$$f(M) := \sup_n \mathbb{E}_P[X_n \mathbb{1}_{\{X_n > M\}}] = \sup_n \mathbb{E}_Q(\mathbb{1}_{\{X_n > M\}}) = \sup Q(X_n > M)$$

$\forall B \in \mathcal{A}: \quad P(A) < \delta \Rightarrow Q(A) < \varepsilon \quad (*)$

weiter ist $P(X_n > M) \leq \frac{1}{M} \mathbb{E}_P[X_n] = \frac{1}{M}$

$\Rightarrow f(M) \xrightarrow[M \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}^1} X_\infty$ und $\mathbb{E}[X_\infty] = 1$

zeige: $\quad Q \overset{!}{=} X_\infty P$.

$\tilde{Q} := X_\infty P \quad$ für $A \in \mathcal{F}_n$

$$\tilde{Q}(A) = \mathbb{E}_P[X_\infty \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}_P[X_n \mathbb{1}_A] = Q(A),$$

d.h. $\tilde{Q} = Q$ auf $\bigcup_n \mathcal{F}_n$, und dies ist $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$.

$\square$

Bericht 7.43. 1. Man nennt die Dichte h von $\nu = h\mu$ bezüglich μ auch die Radon-Nikodým-Ableitung (von ν bezüglich μ) und notiert dies auch als $\frac{d\nu}{d\mu} = h$.

2. Satz 7.42 gilt genauso, wenn μ und ν σ-endlich sind (zerlege $S = \dot\bigcup_k S_k$, so dass $\mu(S_k), \nu(S_k) < \infty$, dann gibt es jeweils $\frac{d\mathbf{1}_{S_k}\nu}{d\mathbf{1}_{S_k}\mu}$).

Auch auf die Forderung, dass $\mathscr{A}$ einen abzählbaren Erzeuger besitzt, kann man verzichten, siehe z.B. [Wi, Ch. 14.13].

Literaturhinweise

[Kl] A. Klenke, Wahrscheinlichkeitstheorie, 4. Aufl., Springer, 2020.

[Wi] D. Williams, Probability with martingales, Cambridge Univ. Press, 1995.

[Ka] O. Kallenberg, Foundations of modern probability, 2. ed, Springer, 2002.

[Ge] H.-O. Georgii, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, 5. Aufl., de Gruyter, 2015.

[KW] G. Kersting, A. Wakolbinger, Stochastische Prozesse, Springer, 2014.

[Du] R. Durrett, Probability : theory and examples, Duxbury Press, 2003.

[Fe] W. Feller, An Introduction to Probability Theory, Band 1 und Band 2, Wiley 1968 und 1971.

[Br] L. Breiman: Probability, Wiley, 1968.

[El] J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie, 5. Auflage, Springer Verlag, 2007.

[Ba] H. Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, de Gruyter, 1978.

Williams, Ch. 15.3 "Mabinogion sheep problem"

Peredur fab Efrawg

magische Schafherde:

schwarze und weiße, bei jedem Blöken wechselt ein Schaf die Farbe

Als Markovkette: $(S_n, W_n)_n$, Übergänge $(s,w) \to (s+1, w-1)$ mit W'keit $\frac{s}{s+w}$

$(s,w) \to (s-1, w+1)$ mit W'keit $\frac{w}{s+w}$

(solange s und $w \geq 1$)

$s_0 + w_0 = s + w = g$ bleibt konstant.

(zumind. im „Inneren" von $\{(s,w) : s+w = g\}$)

„Kontrollaufgabe"

Am Anfang und nach jedem Blöken darf eine beliebige Anzahl weißer Schafe entfernt werden.

Ziel: möglichst viele schwarze Schafe am Ende!