

# Das Pagerank-Verfahren (und Markovketten)

9. Dezember 2019

Gegeben: Eine Sammlung von  $N$  Web-Seiten, die (teilweise) untereinander verlinkt sind.

Sei  $L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Seite } i \text{ auf Seite } j \text{ verweist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Gegeben: Eine Sammlung von  $N$  Web-Seiten, die (teilweise) untereinander verlinkt sind.

Sei  $L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Seite } i \text{ auf Seite } j \text{ verweist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Wir können die Sammlung als einen gerichteten Graphen  $\mathcal{G}$  auffassen, dessen Knoten die  $N$  Seiten sind, und die als Links gerichtete Kanten darstellen.

(Im Jargon der Graphentheorie ist  $(L_{ij})$  die *Adjazenzmatrix*.)

Gegeben: Eine Sammlung von  $N$  Web-Seiten, die (teilweise) untereinander verlinkt sind.

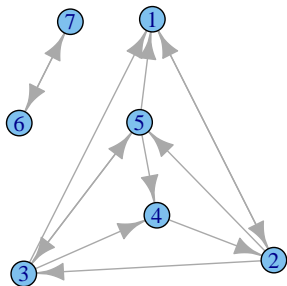
Sei  $L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Seite } i \text{ auf Seite } j \text{ verweist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Wir können die Sammlung als einen gerichteten Graphen  $\mathcal{G}$  auffassen, dessen Knoten die  $N$  Seiten sind, und die als Links gerichtete Kanten darstellen.

(Im Jargon der Graphentheorie ist  $(L_{ij})$  die *Adjazenzmatrix*.)

Beispiel:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Aufgabe: Die Web-Seiten nach „Wichtigkeit“ sortieren.

Idee: Eine Seite ist umso „wichtiger“, je mehr „wichtige“  
Seiten auf sie verweisen.

Klingt erstmal recht selbstbezüglich?!

Aufgabe: Die Web-Seiten nach „Wichtigkeit“ sortieren.

Idee: Eine Seite ist umso „wichtiger“, je mehr „wichtige“  
Seiten auf sie verweisen.

Klingt erstmal recht selbstbezüglich?!

Eine Art, „Wichtigkeit“ zu messen, liefert das Modell des  
*Zufalls-Surfers*.

## Zufalls-Surfer



(c) 2009 Benutzer Usien

$\alpha \in (0, 1)$ :

- ▶ Mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$ : Folge einem rein zufällig ausgewählten Link auf der gerade betrachteten Seite (bzw. springe zu einer rein zufällig aus allen  $N$  Web-Seiten gewählten, wenn es auf der aktuellen Seite überhaupt keinen Link gibt).
- ▶ Mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$ : Springe zu einer rein zufällig aus allen  $N$  gewählten Web-Seite.  
(Mögliche Interpretation: Dem Surfer wird beim Link-Verfolgen langweilig und er möchte etwas ganz anderes sehen.)

## Zufallssurfer als Markovkette

Übergangsmatrix:

$$A_{ij} = \alpha \left( \frac{L_{ij}}{C_i} \mathbf{1}(C_i > 0) + \frac{1}{N} \mathbf{1}(C_i = 0) \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{N}$$

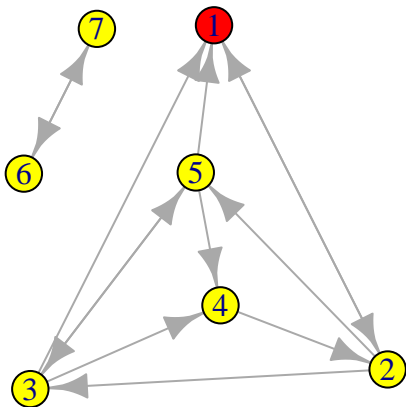
wobei  $C_i = \sum_{j=1}^N L_{ij}$  die Anzahl Links auf Seite  $i$  ist.

Beobachtung:  $(A_{ij})$  ist irreduzibel und aperiodisch (dafür sorgt der Term  $(1 - \alpha) \frac{1}{N}$ , denn damit sind alle Einträge strikt positiv).

$\alpha \in (0, 1)$  ist ein „Tuning-Parameter“.



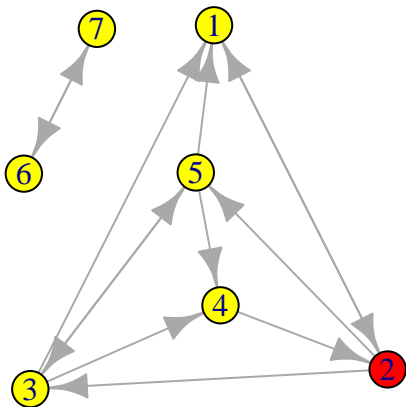
## Beispiel: Ein Pfad durch die Web-Seiten



Starte auf Web-Seite 1

Zeit $i$	0	1	2	3	4	5
Ort $X_i$	1					
W'keit d. Überg.	-					

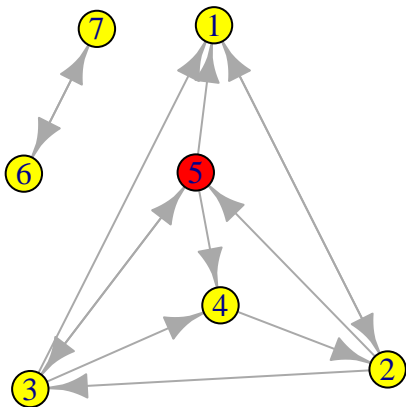
## Beispiel: Ein Pfad durch die Web-Seiten



Starte auf Web-Seite 1

Zeit $i$	0	1	2	3	4	5
Ort $X_i$	1	2				
W'keit d. Überg.	-	$\frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{7}$				

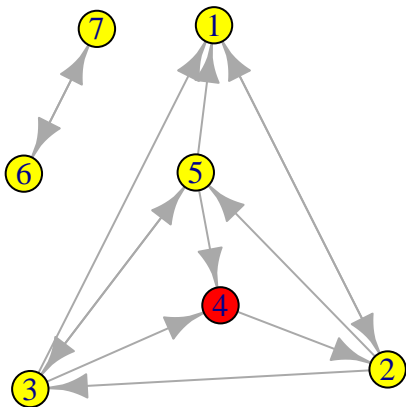
## Beispiel: Ein Pfad durch die Web-Seiten



Starte auf Web-Seite 1

Zeit $i$	0	1	2	3	4	5
Ort $X_i$	1	2	5			
W'keit d. Überg.	-	$\frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{7}$	$\frac{\alpha}{3} + \frac{1-\alpha}{7}$			

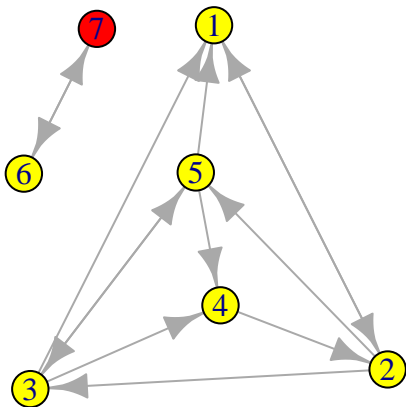
## Beispiel: Ein Pfad durch die Web-Seiten



Starte auf Web-Seite 1

Zeit $i$	0	1	2	3	4	5
Ort $X_i$	1	2	5	4		
W'keit d. Überg.	-	$\frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{7}$	$\frac{\alpha}{3} + \frac{1-\alpha}{7}$	$\frac{\alpha}{3} + \frac{1-\alpha}{7}$		

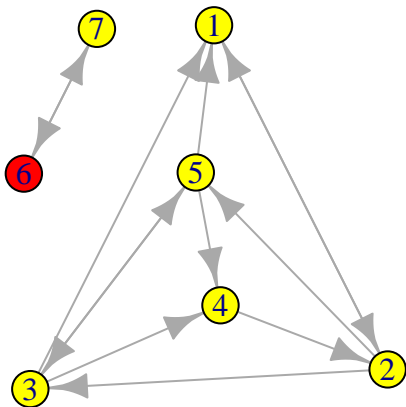
## Beispiel: Ein Pfad durch die Web-Seiten



Starte auf Web-Seite 1

Zeit $i$	0	1	2	3	4	5
Ort $X_i$	1	2	5	4	7	
W'keit d. Überg.	-	$\frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{7}$	$\frac{\alpha}{3} + \frac{1-\alpha}{7}$	$\frac{\alpha}{3} + \frac{1-\alpha}{7}$	$0 + \frac{1-\alpha}{7}$	

## Beispiel: Ein Pfad durch die Web-Seiten



Starte auf Web-Seite 1

Zeit $i$	0	1	2	3	4	5
Ort $X_i$	1	2	5	4	7	6
W'keit d. Überg.	-	$\frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{7}$	$\frac{\alpha}{3} + \frac{1-\alpha}{7}$	$\frac{\alpha}{3} + \frac{1-\alpha}{7}$	$0 + \frac{1-\alpha}{7}$	$\frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{7}$

Vorschlag: Wir messen für jede Seite  $i$  den relativen Anteil  $\pi_i$  der Zeit, den der Zufalls-Surfer auf Seite  $i$  verbringt und postulieren:  
Wichtigkeit ist proportional zu diesem Anteil.

## Die Übergangsmatrix des Beispiels in R:

```
# Adjazenzmatrix
L <- matrix(c(0,1,1,0,1,0,0,
             1,0,0,1,0,0,0,
             0,1,0,0,1,0,0,
             0,0,1,0,1,0,0,
             0,1,1,0,0,0,0,
             0,0,0,0,0,0,1,
             0,0,0,0,0,1,0), ncol=7)

N <- 7
alpha <- 0.9

# Bau der Uebergangsmatrix "von Hand":
A <- matrix(0, nrow=N, ncol=N)
for (i in 1:N) {
  c <- sum(L[i,])
  for (j in 1:N) {
    A[i,j] <- alpha*ifelse(c>0, L[i,j]/c, 1/N)+(1-alpha)/N
  }
}

# (Alternativ als Zweizeiler:)
C <- matrix(rep(rowSums(L),each=N), nrow=N, byrow=TRUE)
Aalt <- alpha*ifelse(C>0, L/C, 1/N)+(1-alpha)*matrix(1/N,nrow=N,ncol=N)
```



## Simulation der Kette in R:

```
# Simulieren eines Uebergangsschritts gemaess Uebergangsmatrix A von Startpunkt x aus:
sim.MKschritt <- function(A, x)
  sample(1:ncol(A), 1, prob=A[x,])

# Einen Pfad der Markovkette mit Uebergangsmatrix A fuer eine gewisse Anzahl Schritte simulieren
schritte <- 100000

pfad <- integer(schritte)

# Startpunkt
pfad[1] <- sample(1:N)

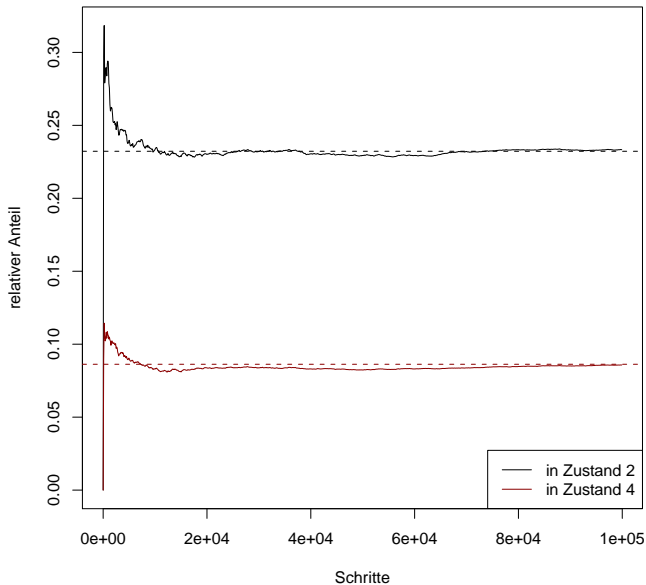
for (i in 2:schritte)
  pfad[i] <- sim.MKschritt(A, pfad[i-1])

# relative Zeitanteile in verschiedenen Zustaenden verfolgen:
sapply(1:N, function(i) sum(pfad==i))/schritte
anteil2 <- cumsum(pfad==2)/(1:schritte)
anteil4 <- cumsum(pfad==4)/(1:schritte)

# und zeichnen:
zeitgitter <- seq(from=1, to=schritte, by=100)

plot(zeitgitter, anteil2[zeitgitter], type="l", xlab="Schritte", col="black",
     ylab="relativer Anteil")
points(zeitgitter, anteil4[zeitgitter], type="l", col="darkred")
legend("bottomright", legend=c("in Zustand 2", "in Zustand 4"), lty=1,
     col=c("black", "darkred"))
```

# Relativer Anteil der Zeit in den Zuständen 2 und 4 für einen simulierten Pfad der Markovkette



Tatsächlich gilt (ganz allgemein für irreduzible und aperiodische Markovketten auf endlichen Mengen):  
Sei  $X_n$  = Ort der Kette im  $n$ -ten Schritt. Für jedes  $i$  gilt

$$\frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \mathbf{1}(X_n = i) \rightarrow \pi_i$$

(mit Wahrscheinlichkeit 1), wo  $\pi = (\pi_i)_{i=1, \dots, N}$  das (eindeutig bestimmte) Gleichgewicht zu  $A$  ist, d.h.

$$\pi = \pi A \tag{1}$$

(so normiert, dass  $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$ ).

(1) ist ein lineares Gleichungssystem für  $(\pi_1, \dots, \pi_N)$   
(das unterbestimmt ist, Lösung eindeutig unter Gesamtsummenbedingung).

Gesucht: Gleichgewicht,  $\pi A = \pi$

Iterative (approximative) Lösung:

Sei  $\mu$  irgendeine Verteilung auf  $\{1, \dots, N\}$  (die uniforme Vert. auf den  $N$  Web-Seiten,  $\mu = (\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$ ), ist vielleicht die naheliegendste Wahl), so gilt

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A^n \quad (2)$$

Gesucht: Gleichgewicht,  $\pi A = \pi$

Iterative (approximative) Lösung:

Sei  $\mu$  irgendeine Verteilung auf  $\{1, \dots, N\}$  (die uniforme Vert. auf den  $N$  Web-Seiten,  $\mu = (\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$ ), ist vielleicht die naheliegendste Wahl), so gilt

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A^n \quad (2)$$

Wahrscheinlichkeitsinterpretation: Die Markovkette  $(X_n)$  erfüllt für jedes  $i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\mu(X_n = i) = \pi_i.$$

Gesucht: Gleichgewicht,  $\pi A = \pi$

Iterative (approximative) Lösung:

Sei  $\mu$  irgendeine Verteilung auf  $\{1, \dots, N\}$  (die uniforme Vert. auf den  $N$  Web-Seiten,  $\mu = (\frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N})$ ), ist vielleicht die naheliegendste Wahl), so gilt

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A^n \quad (2)$$

Wahrscheinlichkeitsinterpretation: Die Markovkette  $(X_n)$  erfüllt für jedes  $i$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\mu(X_n = i) = \pi_i.$$

Die Konvergenz in (2) ist sehr schnell: Untersuchen wir den  $\ell^1$ -Abstands zum Gleichgewicht,  $\sum_{i=1}^N |(\mu A^n)_i - \pi_i|$  mit  $\mathbb{R}$

$\pi$  via iteration mit R bestimmen:

#  $2^n$ -te Potenz einer Matrix (schnell) berechnen:

```
matrix2erpotenz <- function(M, n) {  
  B <- M  
  for (i in 1:n)  
    B <- B %*% B  
  B  
}
```

# Verteilung nach  $2^{15}$  Schritten ist numerisch vom

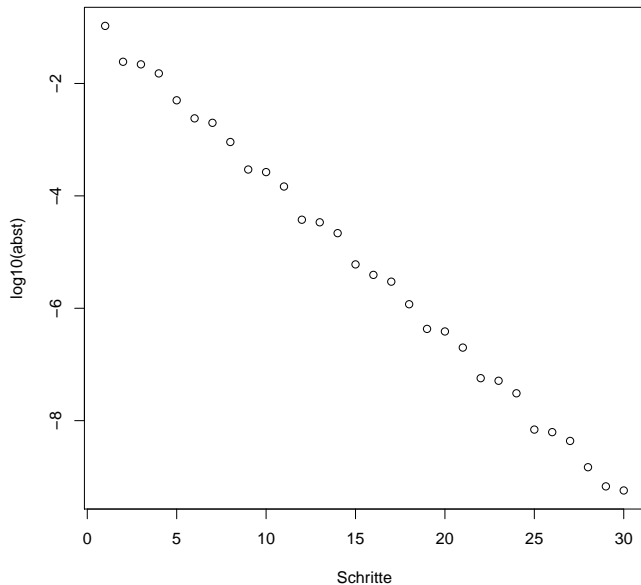
# Gleichgewicht ununterscheidbar:

```
pi <- rep(1/N, times=N) %*% matrix2erpotenz(A,15)  
pi  
pi %*% A  
pi - pi %*% A
```

Abstand vom Gleichgewicht mit R bestimmen:

```
schritte <- 30  
stvert <- rep(1/N, times=N)  
abst <- numeric(schritte)  
B <- A  
for (i in 1:schritte) {  
  abst[i] <- sum(abs(stvert %*% B - pi))  
  B <- B %*% A  
}  
plot(1:schritte, log10(abst), xlab="Schritte")
```

(Zehner-)Logarithmus des  $\ell^1$ -Abstands zum Gleichgewicht,  
 $\sum_{i=1}^N |(\mu A^n)_i - \pi_i|$ , als Funktion der Schrittanzahl  $n$





## Bemerkungen

- ▶ Die Firma Google benutzt diese Methode (unter anderen), um Suchergebnisse nach „Relevanz“ zu sortieren (das sog. PageRank-Verfahren, es ist patentiert und der Name als Markenzeichen geschützt).  
Sergey Brin, Lawrence Page, The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine, Computer Networks and ISDN Systems 30:107–117 (1998)
- ▶ Diese Tatsache liegt auch den sog. Google-Bomben zugrunde, bei denen Webautoren absichtlich viele Links auf eine gewisse Seite setzen (zusammen mit einem geeigneten “anchor text”), um deren Rang bei Google-Suche zu erhöhen.
- ▶ Google (und andere Internet-Suchmaschinen) löst ein nicht-triviales Problem der numerischen linearen Algebra:  $N > 10^9$