Zu Rückkehrwahrscheinlichkeiten für die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ und ihrer Erzeugendenfunktion

Matthias Birkner, 20. Mai 2010

(S_n) einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, startend in $S_0 = 0$, sei

$$r(n) := p_n(0,0) := \mathbb{P}(S_n = 0), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

die Rückkehrwahrscheinlichkeit nach n Schritten und

$$b(k) := \mathbb{P}(S_k = 0, S_i \neq 0, 0 < i < k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

die Wahrscheinlichkeit, nach genau k Schritten zum ersten Mal zur 0 zurückzukehren. Offenbar gilt $p_n(0,0) > 0$ und $b(k) > 0$ nur für gerade n bzw. k. Es ist

$$p_{2n}(0,0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = 2^{-2n}\binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

denn um nach $2n$ Schritten zur 0 zurückzukehren, muss man genau n Aufwärts- und n Abwärtsschritte ausführen, es gibt also $\binom{2n}{n}$ mögliche Pfade.

Stirling-Approximation ($n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$) für die im Binomialkoeffizienten auftretenden Fakultäten zeigt

$$p_{2n}(0,0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{für } n \to \infty. \tag{4}$$

Für $|s| < 1$ seien

$$R(s) := \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_n(0,0), \tag{5}$$

$$B(s) := \sum_{k=1}^{\infty} s^k b(k) \tag{6}$$

die zugehörigen Erzeugendenfunktionen. (3) zeigt

$$R(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^{2n} 2^{-2n}\binom{2n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-s^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \tag{7}$$

wobei für $a \in \mathbb{R}$

$$\binom{a}{0} := 1, \quad \binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

und wir für das letzte Gleichheitszeichen den allgemeinen binomischen Satz $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}u^n = (1+u)^a$ (für $|u| < 1$) benutzt haben (alternativ kann man auch leicht prüfen, dass die Summe in (7) die Taylorreihe von $(1-s^2)^{-1/2}$ ist). Für das zweite Gleichheitszeichen in (7) beachten wir

$$n!(-1)^n\binom{-1/2}{n} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}+i\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot 2n}{2^n\cdot 2\cdot 4\cdots(2n-2)\cdot 2n} = 2^{-2n}\frac{(2n)!}{n!} \tag{8}$$

Für gerades $n > 0$ ist (zerlege das Ereignis $\{S_n = 0\}$ nach der Anzahl m der Besuche in 0 im Zeitintervall $(0, n]$)

$$r(n) = p_n(0,0) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_m \geq 1 \\ k_1+\dots+k_m=n}} \prod_{i=1}^{m} b(k_i) \tag{9}$$

(wobei beide Seiten $= 0$ sind für ungerades n), also (beachte $p_0(0,0) = 1$)

$$R(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n p_n(0,0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_m \geq 1 \\ k_1+\dots+k_m=n}} \prod_{i=1}^{m} \left(s^{k_i} b(k_i)\right) \tag{10}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_m \geq 1 \\ k_1+\dots+k_m=n}} \prod_{i=1}^{m} \left(s^{k_i} b(k_i)\right) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} s^k b(k)\Big)^m = 1 + \frac{B(s)}{1-B(s)} = \frac{1}{1-B(s)}$$

also $R(s) = 1 - 1/B(s)$. Demnach (für das dritte Gleichheitszeichen in folgender Identität argumentiere man analog zu (8))

$$B(s) = 1 - \sqrt{1-s^2} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-s^2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n}} \binom{2n}{n} s^{2n}, \quad |s| < 1 \tag{11}$$

(was mit $B(1) = 1$ stetig fortgesetzt werden kann) und wir sehen

$$b(2n) = \frac{1}{(2n-1)2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2n-1} p_{2n}(0,0), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Insbesondere zeigt (11), dass

$$1 - B(1-t) = \sqrt{2t - t^2} \sim \sqrt{2t} \quad \text{für } t \searrow 0, \tag{13}$$

und (12) zusammen mit (4) zeigt

$$b(2n) \sim \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, (2n)^{-1-1/2} \quad \text{für } n \to \infty. \tag{14}$$

Anmerkungen

1. Mit $B(1) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} b(2n)$ zeigen obige Überlegungen insbesondere die *Rekurrenz* der einfachen symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$.

2. Die Zeitpunkte $\{n : S_n = 0\}$ bilden einen sogenannten *Erneuerungsprozess*: die Markoveigenschaft zeigt, dass die Differenzen aufeinanderfolgender solcher Zeiten unabhängig sind mit Verteilung $b(\cdot)$. In diesem Kontext sind (9), (10) allgemein gültige Beziehungen zwischen der *Wartezeitverteilung* $b(\cdot)$ und der *Erneuerungswahrscheinlichkeit* $r(\cdot)$ bzw. den entsprechenden Erzeugendenfunktionen.

3. Formeln (13) und (14) illustrieren eine sehr allgemein gültige Beziehung zwischen der Asymptotik von Folgen und der Asymptotik ihrer Erzeugendenfunktionen: Seien $d_n \geq 0$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = 1$, $D(s) := \sum_{n=1}^{\infty} d_n s^n$. Dann gilt für $a \in (0,1)$ und $c \in (0, \infty)$

$$d_n \sim c \times n^{-1-a} \quad \text{für } n \to \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 - D(s) \sim c \times \frac{\Gamma(1-a)}{a} (1-s)^a \quad \text{für } s \nearrow 1. \tag{15}$$

   (Beachte, dass $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.) Solche Ergebnisse finden sich in der Literatur unter dem Stichwort „Taubersatz“.

4. In Kapitel IV.3 des Buches von Feller [F1] findet sich eine elementare, rein kombinatorische Herleitung von (12). Die oben diskutierten Erzeugendenfunktion finden sich beispielsweise (in etwas allgemeinerer Form) in [F1], Kap. XI.3, Abschn. b) und c).

Literatur

[F1] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications.* Vol. I, 3rd Ed, Wiley, 1968.