

Domino-Shuffling*

Matthias Birkner

Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Betreute Informationsveranstaltung für Schülerinnen und Schüler
der Oberstufe sowie andere Studieninteressierte (BISS)



23. Juni 2010

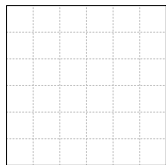
*basierend auf Arbeiten von N. Elkies, W. Jockush,
G. Kuperberg, M. Larsen, J. Propp, P. Shor





JOHANNES GUTENBERG
UNIVERSITÄT MAINZ

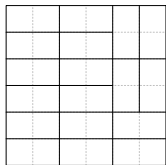
Dominos und Pflasterbarkeit

Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?




Dominoes und Pflasterbarkeit

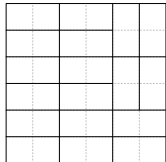
Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



pflasterbar

Dominos und Pflasterbarkeit

Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?




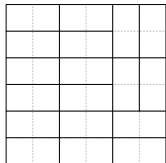
pflasterbar



nicht pflaster-
bar: $2 \nmid 5 \cdot 7$

Dominos und Pflasterbarkeit

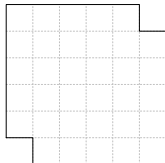
Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



pflasterbar

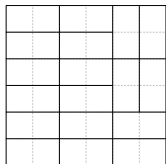


nicht pflasterbar:
bar: $2 \nmid 5 \cdot 7$



Dominos und Pflasterbarkeit

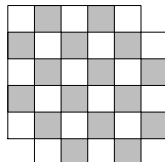
Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



pflasterbar





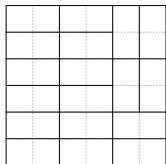
nicht pflasterbar: $2 \nmid 5 \cdot 7$



nicht pflasterbar: 18 weiße, 16 schwarze Kästchen

Dominos und Pflasterbarkeit

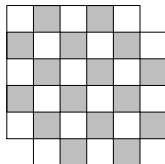
Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



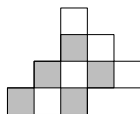
pflasterbar



nicht pflasterbar:
 $2 \nmid 5 \cdot 7$

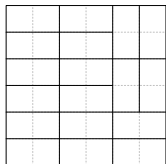
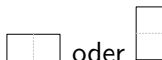


nicht pflasterbar:
18 weiße,
16 schwarze Kästchen



Dominos und Pflasterbarkeit

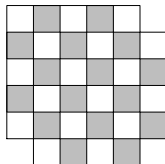
Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos pflastern?



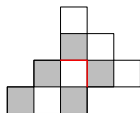
pflasterbar



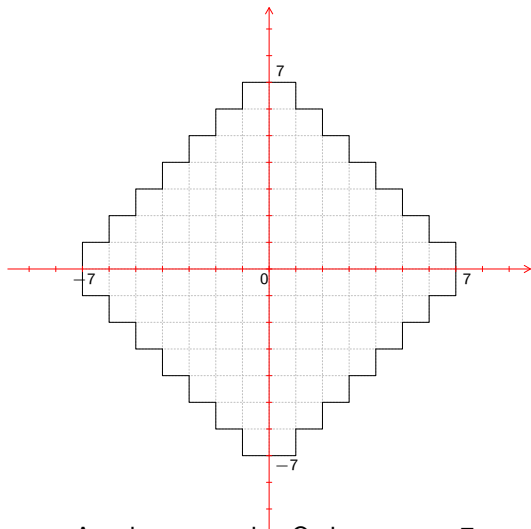
nicht pflasterbar:
2 \neq 5 · 7



nicht pflasterbar:
18 weiße,
16 schwarze Kästchen

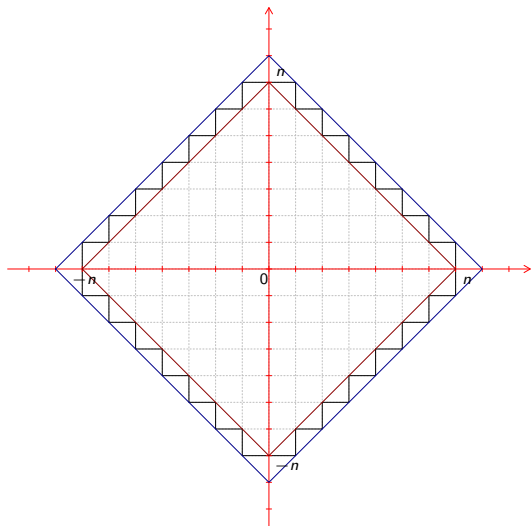


nicht pflasterbar: Teilgebiet links unterhalb der roten Kurve hat Schwarz-Überschuß, aber nur schwarze Nachbarfelder



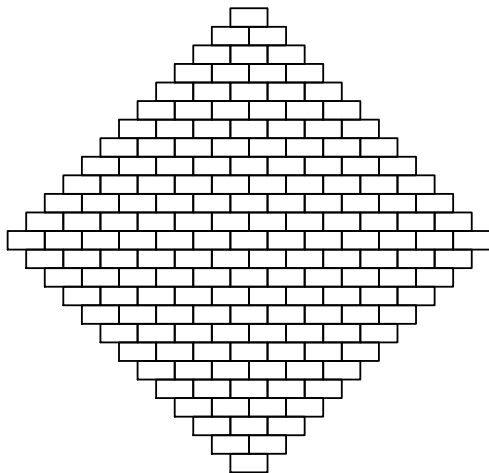
Aztekenraute der Ordnung $n = 7$

Aztekenraute

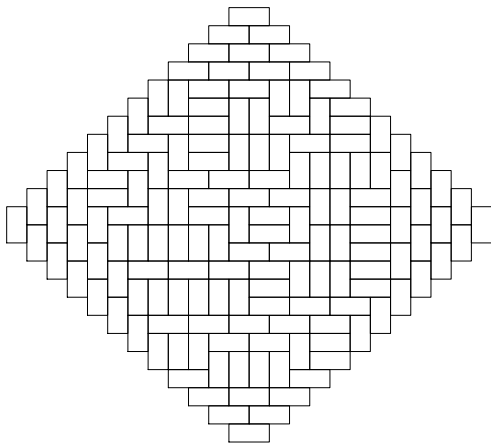


Bem.: Die Aztekenraute der Ordnung n hat Flächeninhalt $2n(n + 1)$.

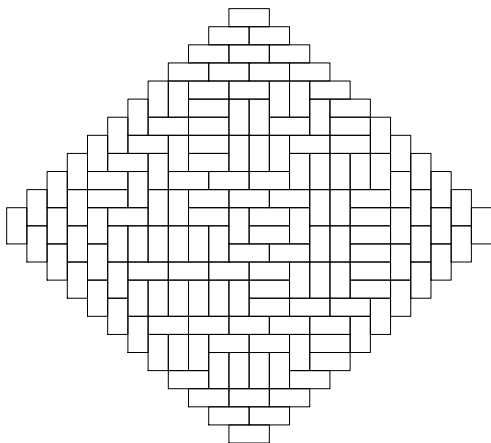
Die Aztekenraute ist pflasterbar:



Eine zufällige Domino-Pflasterung der AR(12)



Eine zufällige Domino-Pflasterung der AR(12)

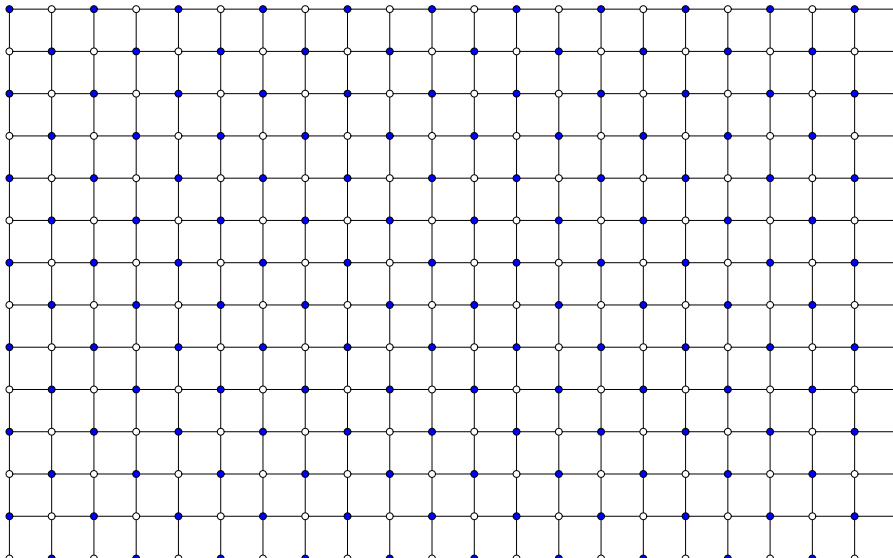


Wir werden sehen: Es gibt $2^{n(n+1)/2}$ verschiedene Dominopflasterungen der $AD(n)$.

(Für $n = 12$: $2^{78} \approx 3 \cdot 10^{23}$)

Ungerade und gerade

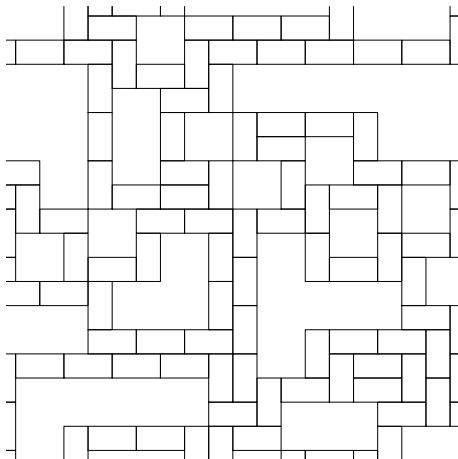
Gitterpunkte mit (un)gerader Koordinatensumme heißen (un)gerade.



Definition

Eine (Teil-)Pflasterung P der Ebene heißt *ungerade-Block-frei*, wenn sie keinen ungeraden Block enthält und der nicht überdeckte Bereich aus ungeraden Blöcken zusammengesetzt werden kann.

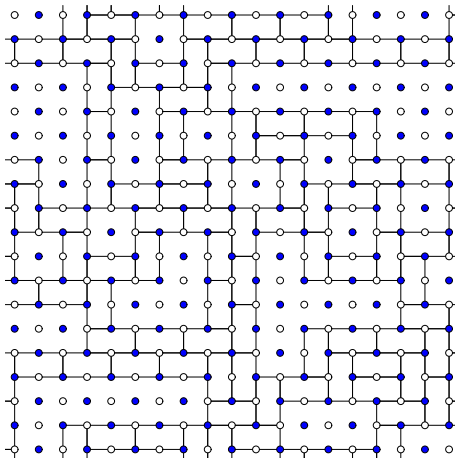
(Analog: *gerade-Block-frei*)



Definition

Eine (Teil-)Pflasterung P der Ebene heißt *ungerade-Block-frei*, wenn sie keinen ungeraden Block enthält und der nicht überdeckte Bereich aus ungeraden Blöcken zusammengesetzt werden kann.

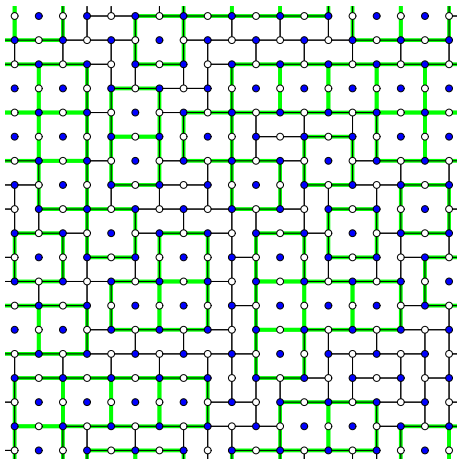
(Analog: *gerade-Block-frei*)



Definition

Eine (Teil-)Pflasterung P der Ebene heißt *ungerade-Block-frei*, wenn sie keinen ungeraden Block enthält und der nicht überdeckte Bereich aus ungeraden Blöcken zusammengesetzt werden kann.

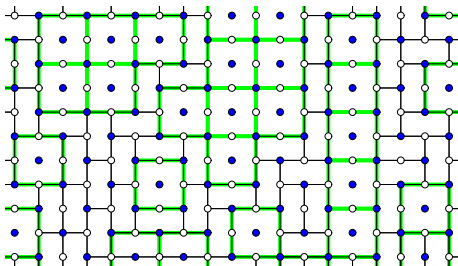
(Analog: *gerade-Block-frei*)



Definition

Eine (Teil-)Pflasterung P der Ebene heißt *ungerade-Block-frei*, wenn sie keinen ungeraden Block enthält und der nicht überdeckte Bereich aus ungeraden Blöcken zusammengesetzt werden kann.

(Analog: *gerade-Block-frei*)



Lemma

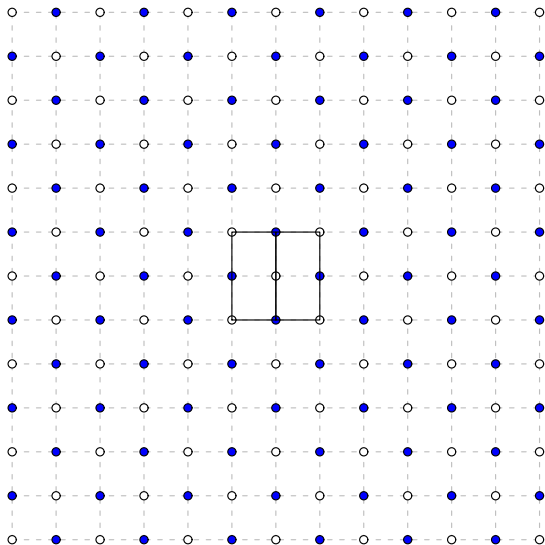
Sei P eine ungerade-Block-freie (Teil-)Pflasterung der Ebene. Dann ist $\tilde{P} := V_u(P)$ ebenfalls eine ungerade-Block-freie (Teil-)Pflasterung und es gilt $V_u(\tilde{P}) = P$.

Analog für P gerade-Block-frei und V_g .

Domino-Shuffling

$n = 1$

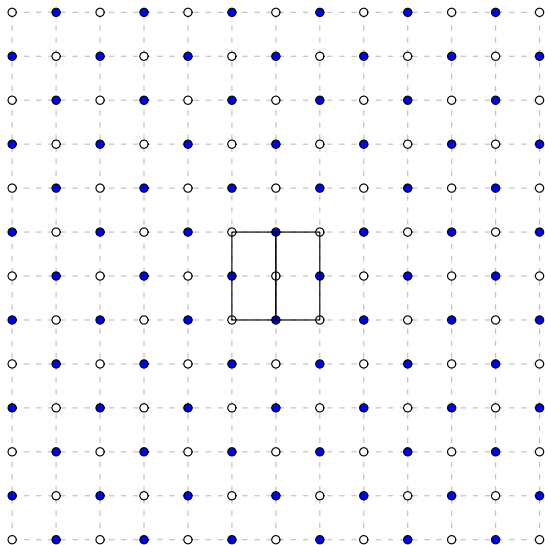
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 1$

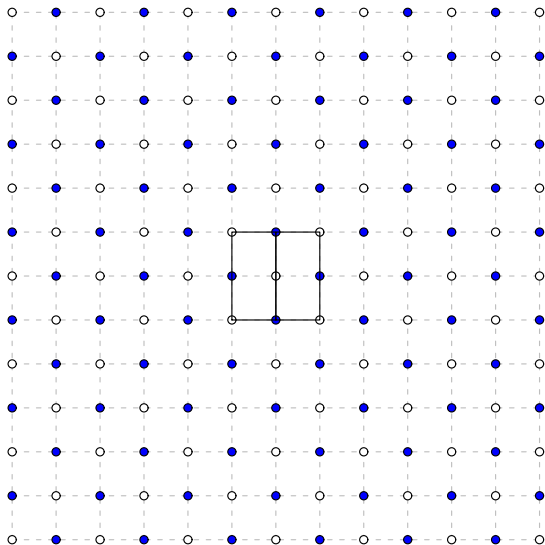
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 1$

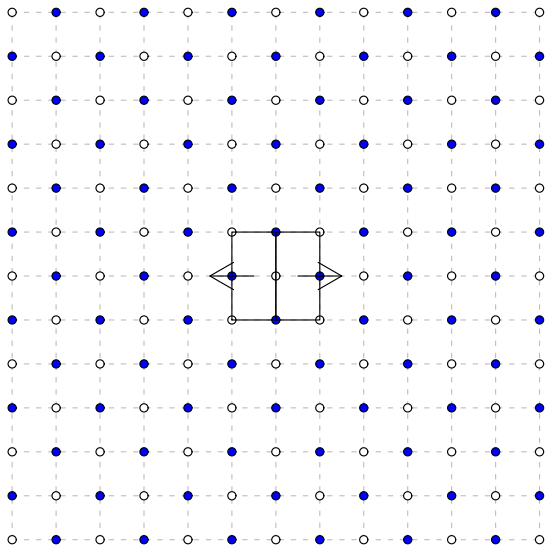
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 1$

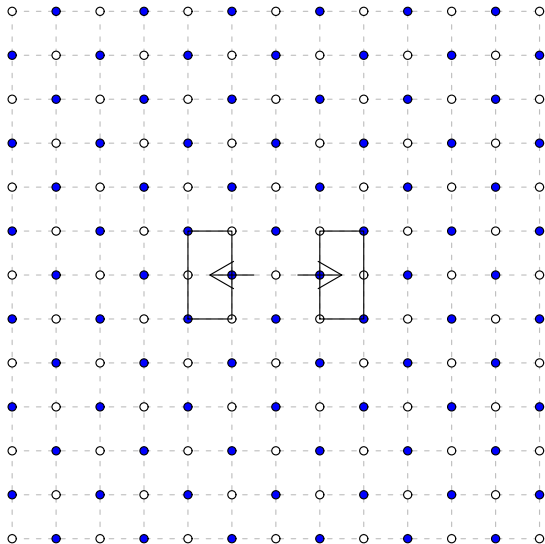
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde LÖcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 1$

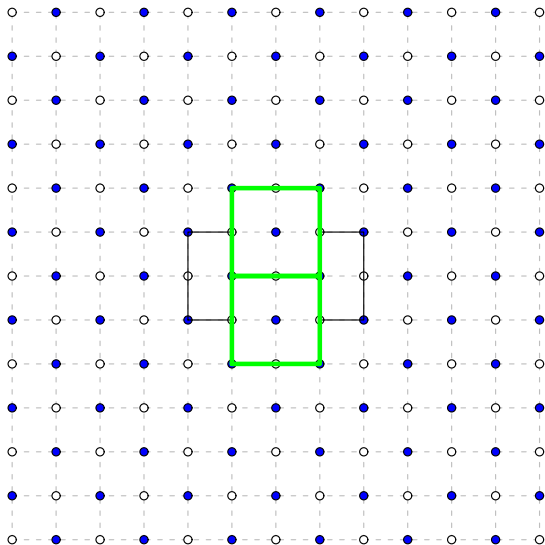
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 1$

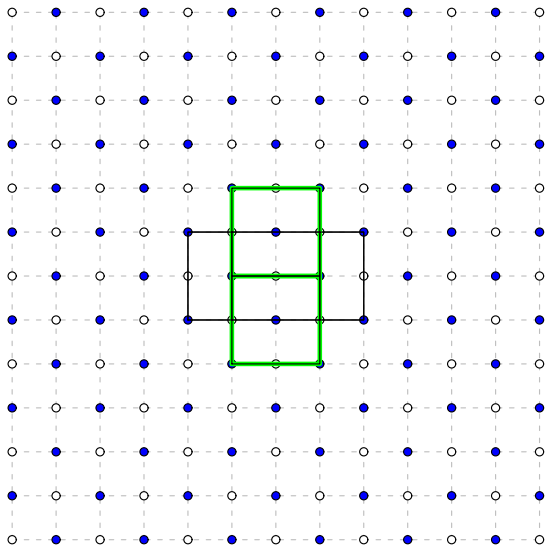
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 1$

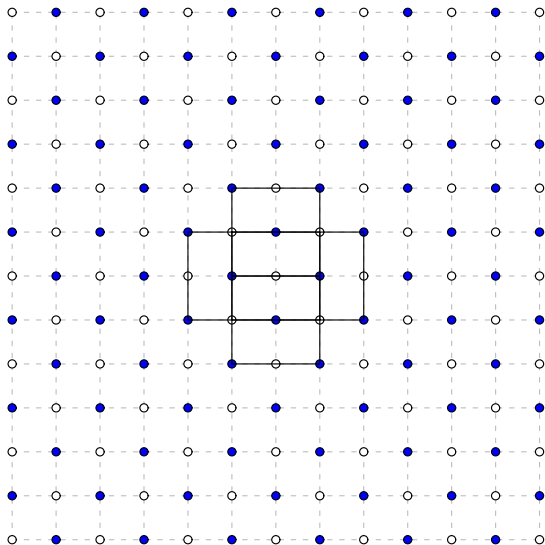
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 2$

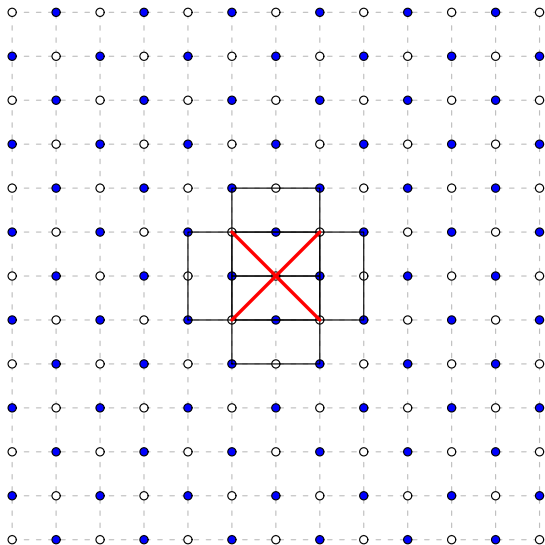
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$$n = 2$$

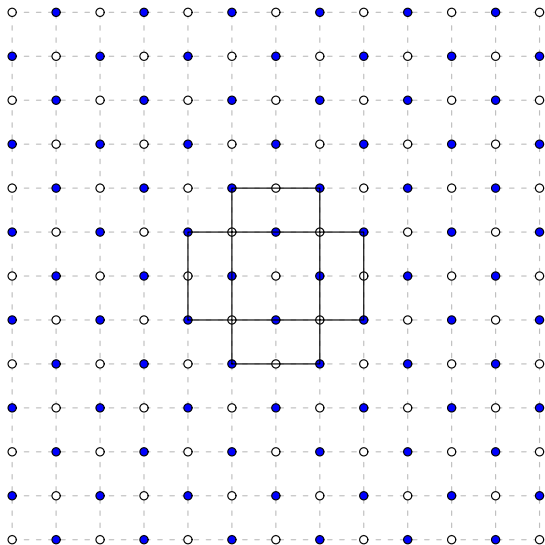
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 2$

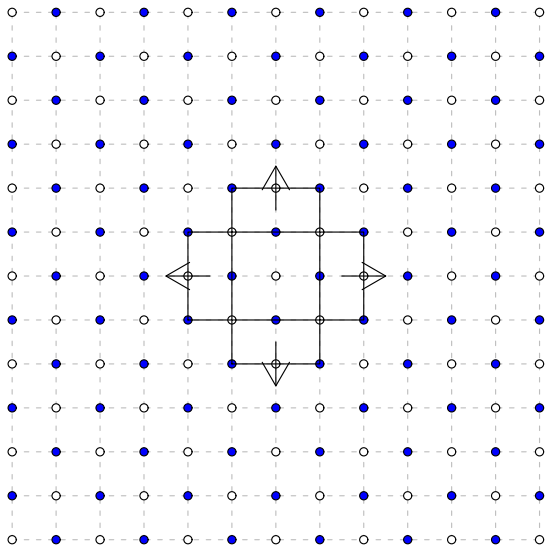
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 2$

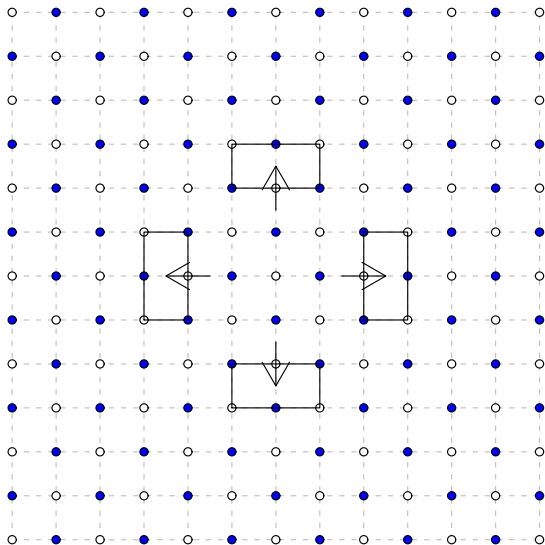
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$$n = 2$$

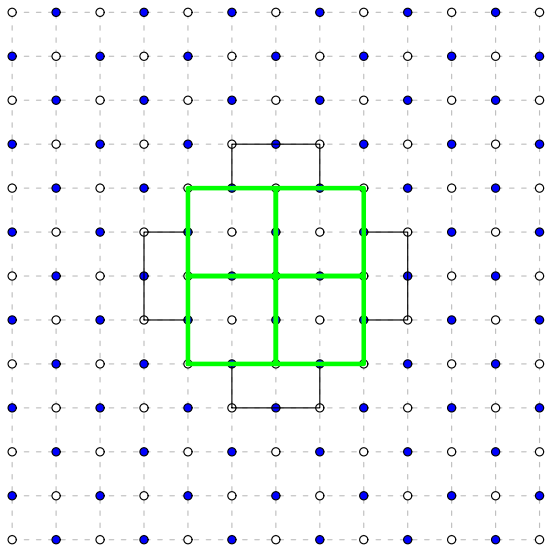
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 2$

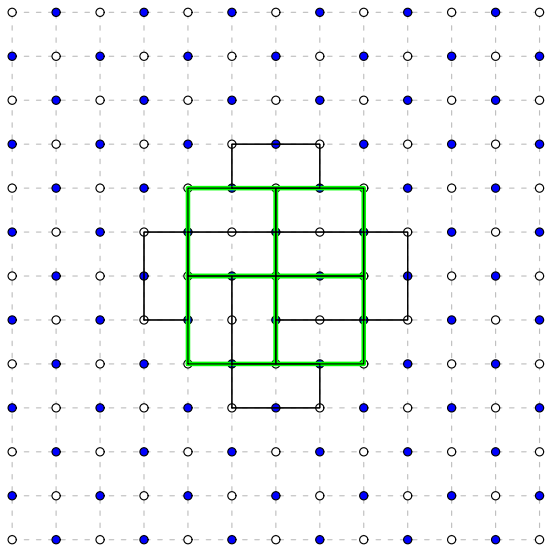
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$$n = 2$$

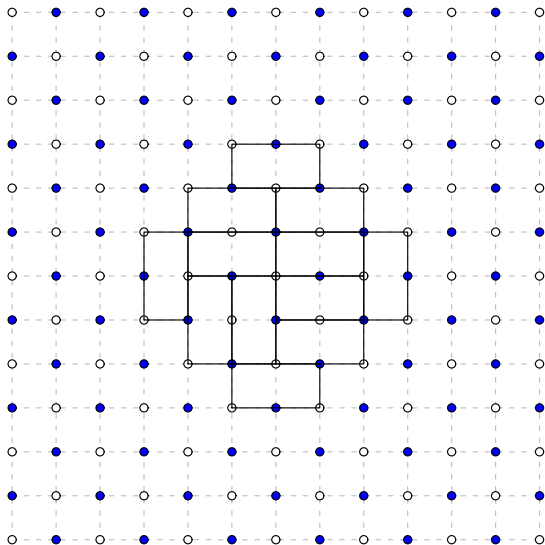
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 3$

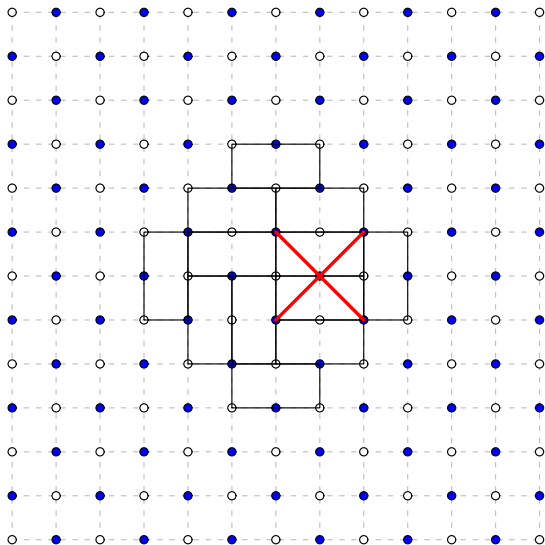
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 3$

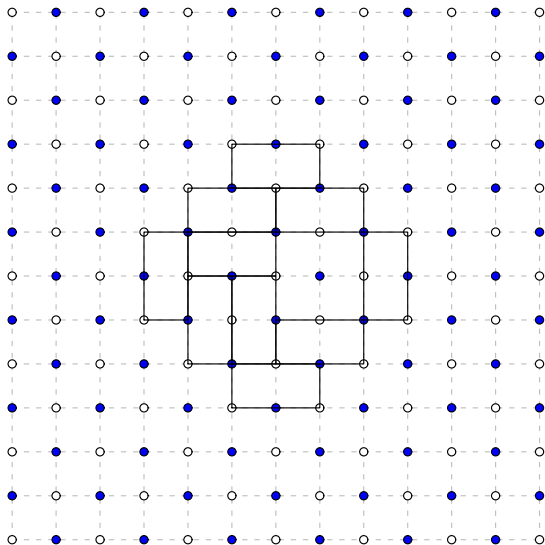
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 3$

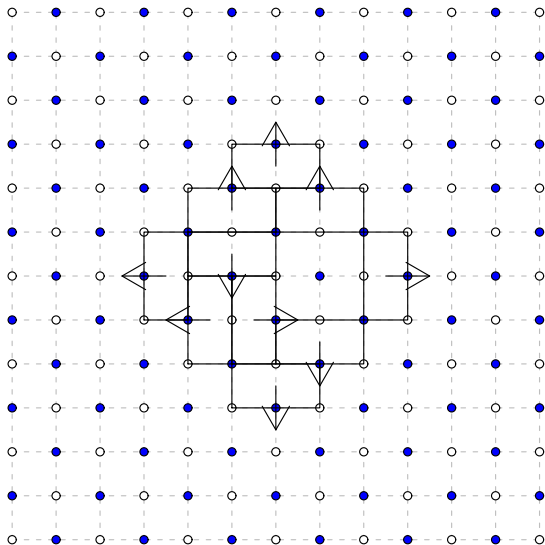
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 3$

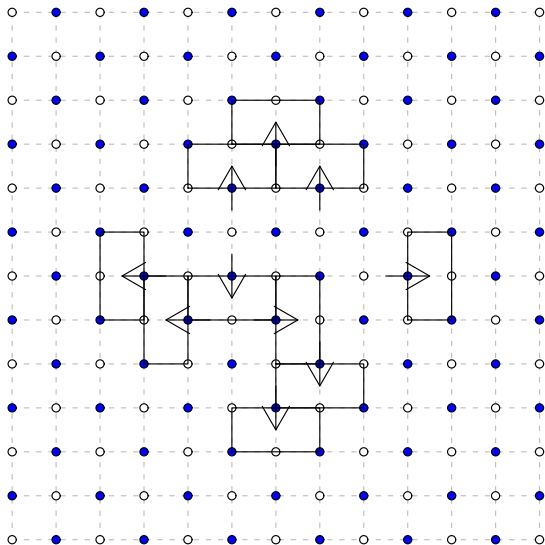
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 3$

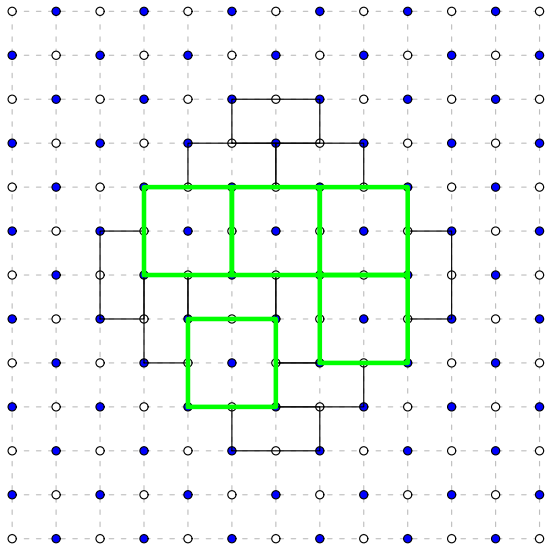
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 3$

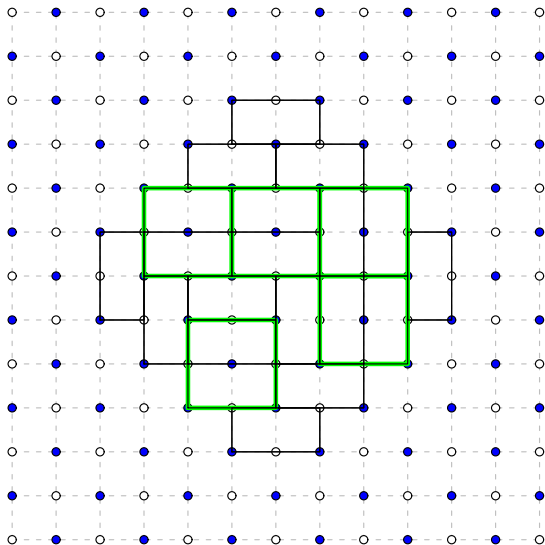
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 3$

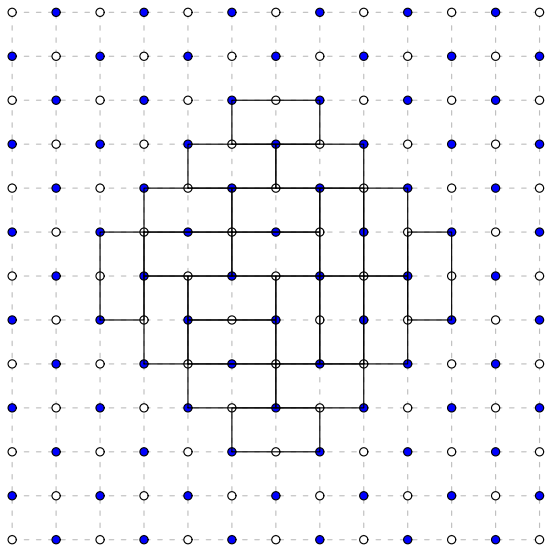
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$$n = 4$$

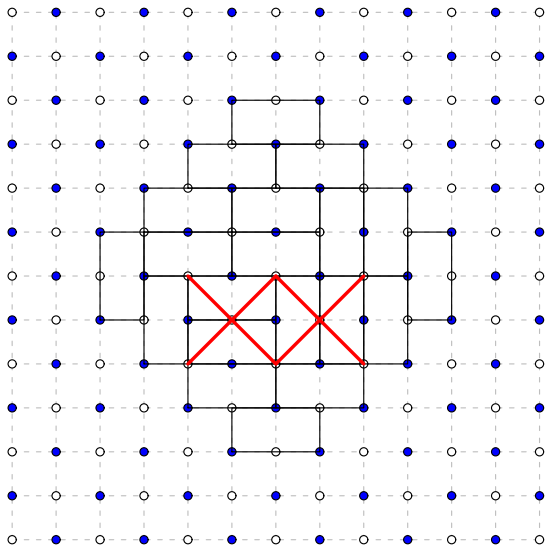
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$$n = 4$$

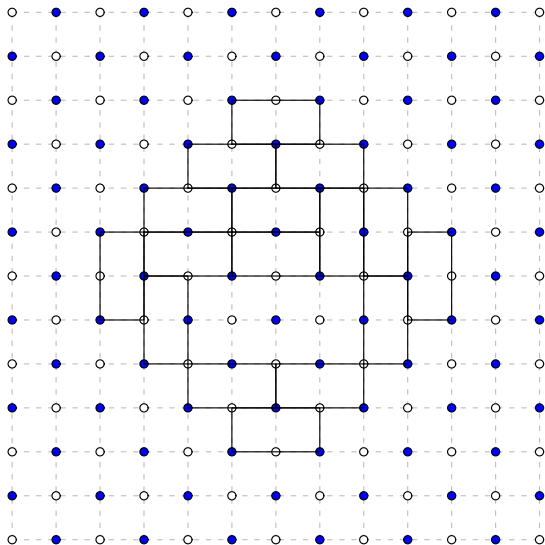
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Llöcher, füle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 4$

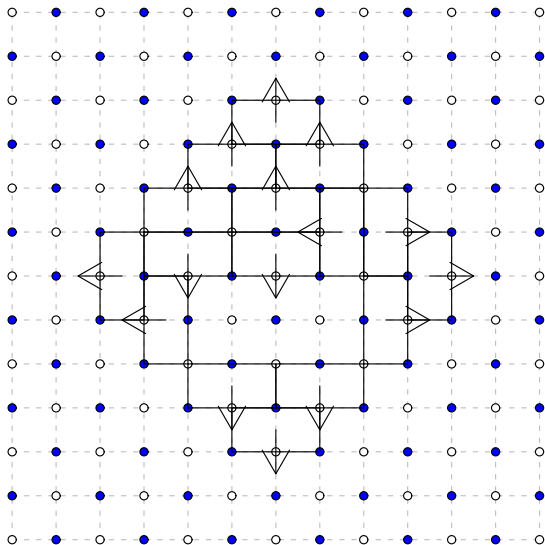
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Lächer, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 4$

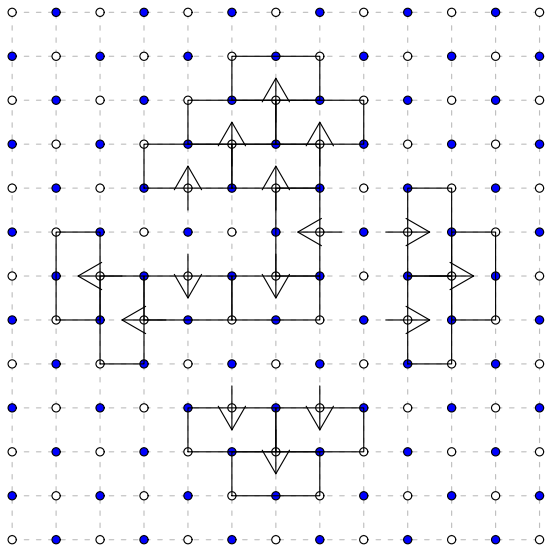
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 4$

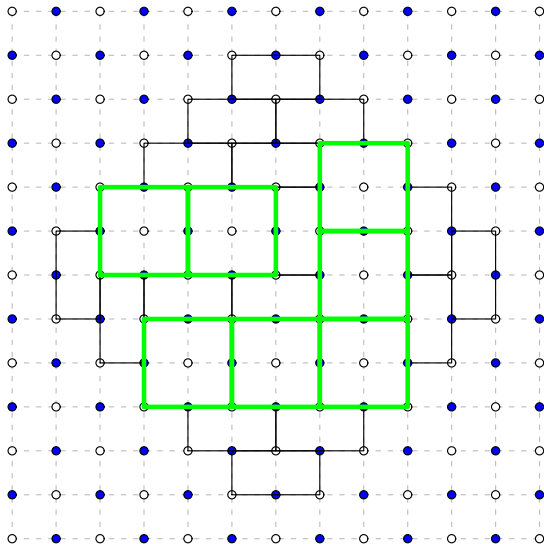
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 4$

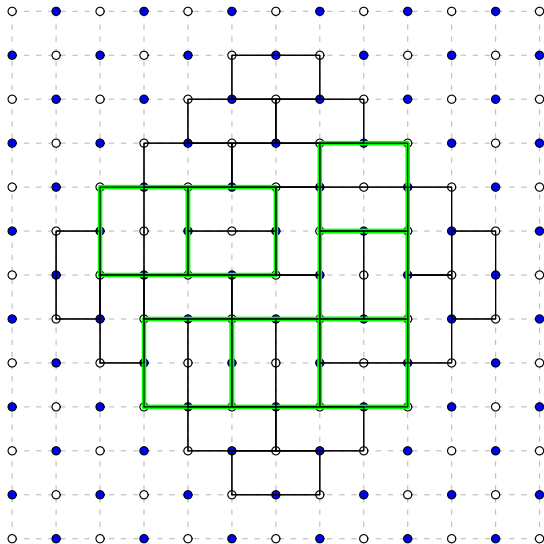
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 4$

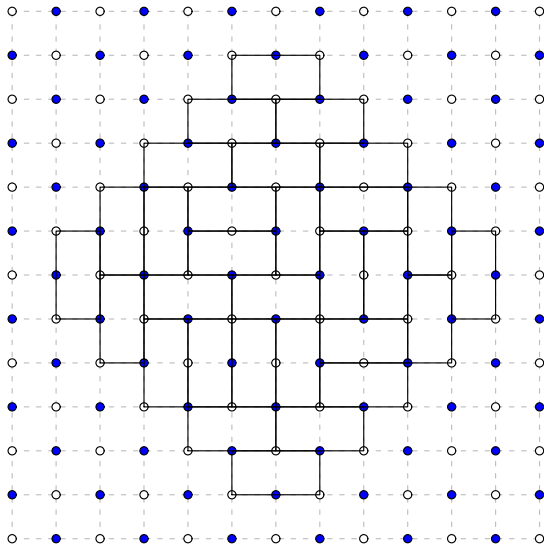
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 5$

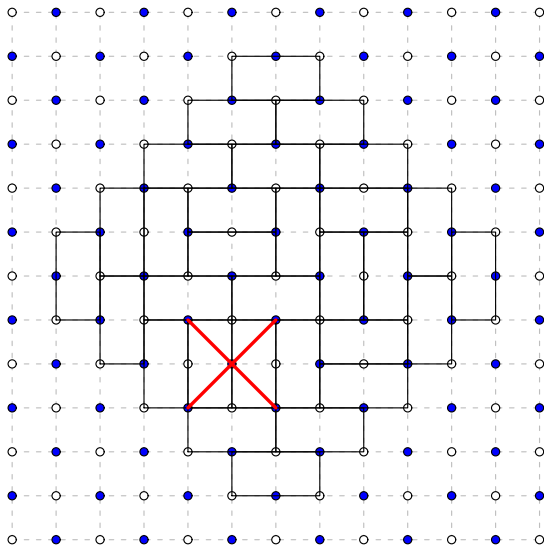
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 5$

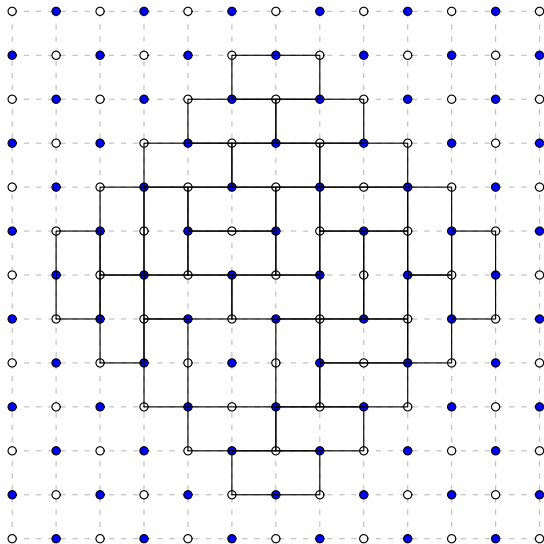
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 5$

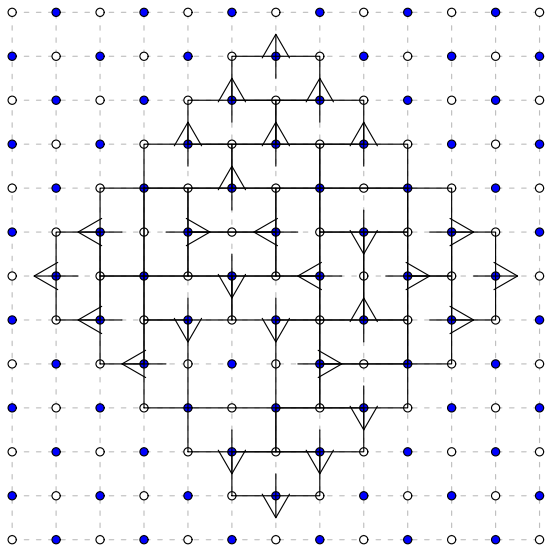
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 5$

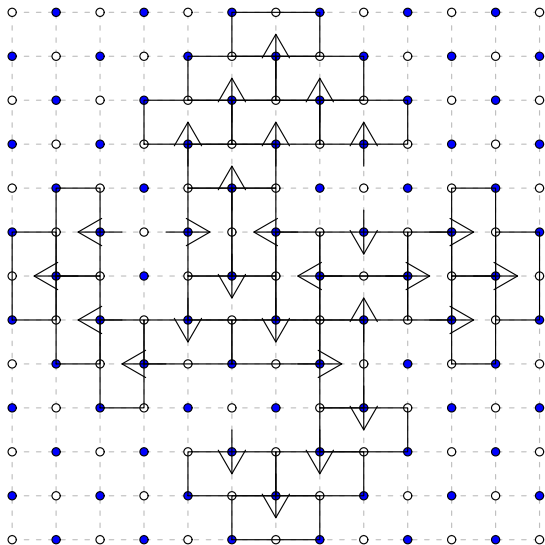
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 5$

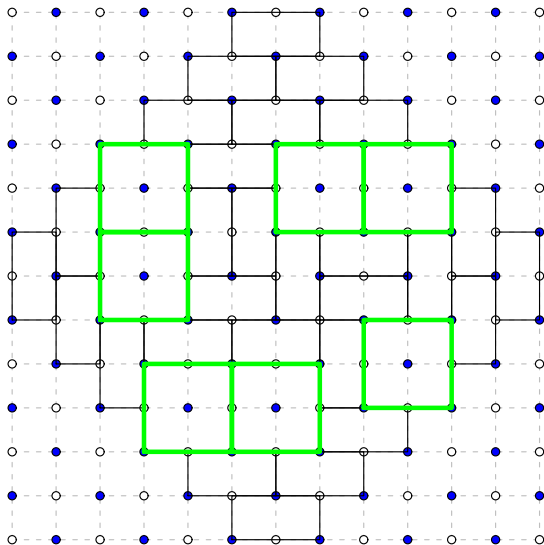
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 5$

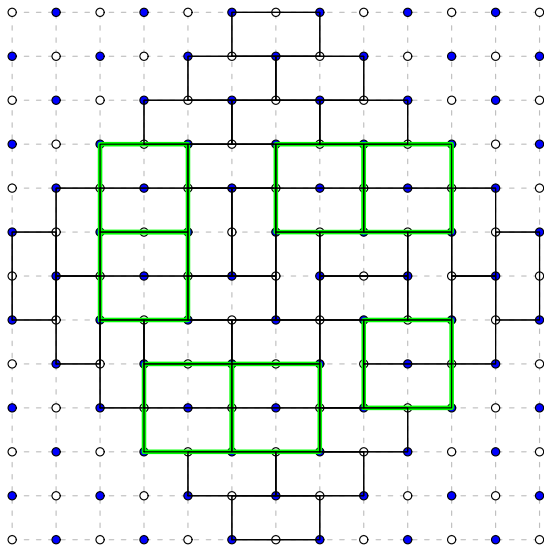
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Lächer, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 5$

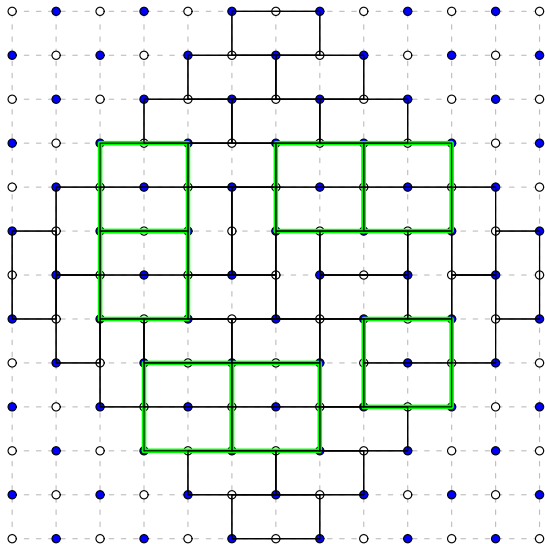
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 5$

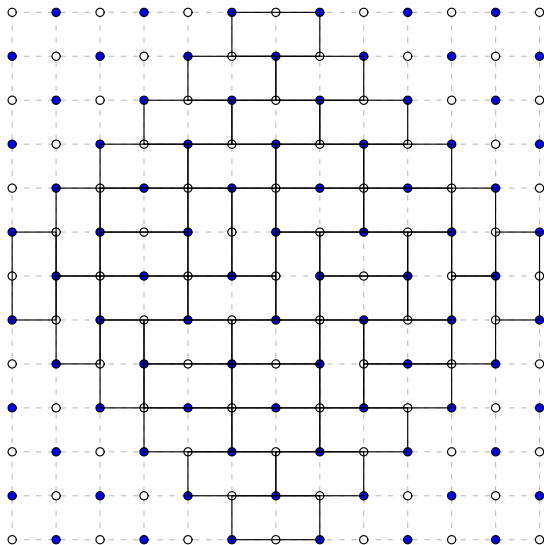
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



Domino-Shuffling

$n = 5$

- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung

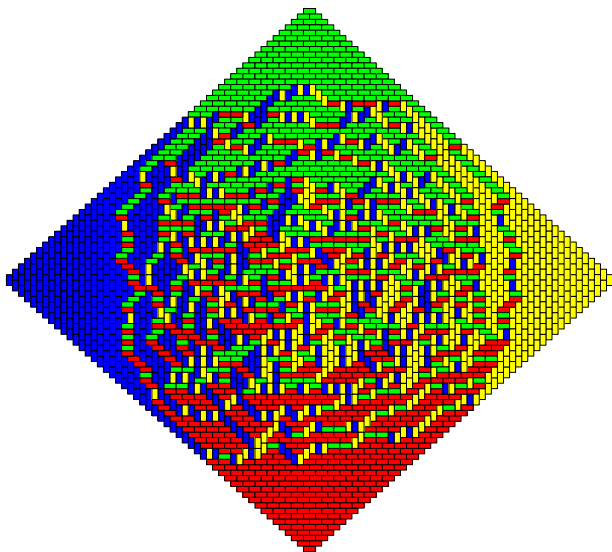


Domino-Pflasterungen der Aztekenraute generieren und zählen

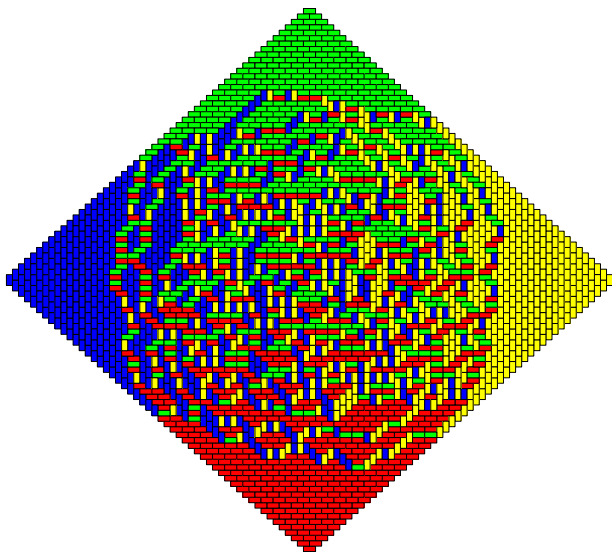
Satz

- 1 Es gibt $2^{n(n+1)/2}$ verschiedene Domino-Pflasterungen der Aztekenraute $AR(n)$ der Ordnung n .
- 2 $(n - 1)$ Iterationen von domino shuffling erzeugen eine davon rein zufällig.
- 3 n ungerade (bzw. gerade), P eine Pflasterung von $AR(n + 1)$ mit k ungeraden (geraden) Blocks. Dann gibt es 2^{k-n-1} verschiedene Pflasterungen P' von $AR(n)$, von denen aus P durch einen domino shuffling-Schritt erreicht werden kann. Für jedes solche P' ist die Wahrscheinlichkeit, P in einem domino shuffling-Schritt zu erreichen, gleich 2^{-k} .

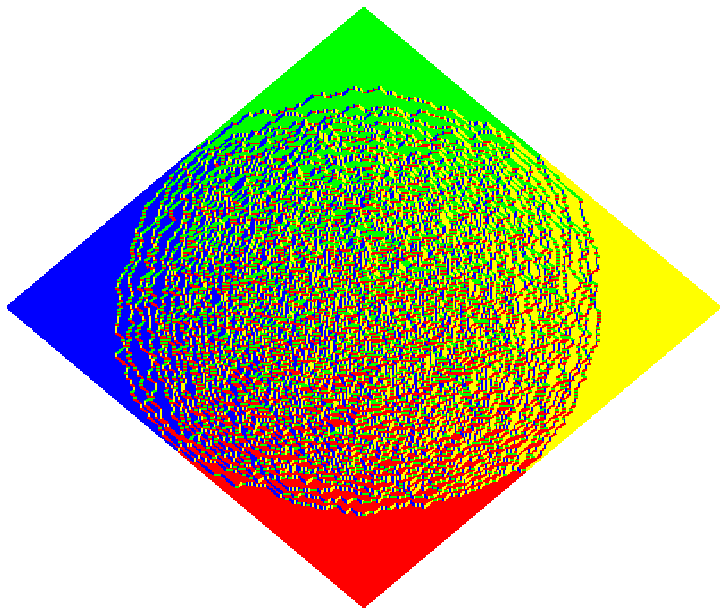
Eine zufällige Domino-Pflasterung der AR(50)



Eine andere zufällige Domino-Pflasterung der AR(50)



Eine zufällige Domino-Pflasterung der AR(200)



Elkies, Noam; Kuperberg, Greg; Larsen, Michael; Propp, James:
Alternating-sign matrices and domino tilings. I.

J. Algebraic Combin. 1 (1992), no. 2, 111–132.

Alternating-sign matrices and domino tilings. II.

J. Algebraic Combin. 1 (1992), no. 3, 219–234.

<http://de.arxiv.org/abs/math/9201305>

Jockusch, William; Propp, James; Shor, Peter:

Random Domino Tilings and the Arctic Circle Theorem.

[arxiv:math/9801068](http://arxiv.org/abs/math/9801068) (1998).

<http://de.arxiv.org/abs/math/9801068>