

# Domino-Shuffling\*

Matthias Birkner

Institut für Mathematik  
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Betreute Informationsveranstaltung für Schülerinnen und Schüler  
der Oberstufe sowie andere Studieninteressierte (BISS)

23. Juni 2010

\*basierend auf Arbeiten von N. Elkies, W. Jockush,  
G. Kuperberg, M. Larsen, J. Propp, P. Shor



JOHANNES GUTENBERG  
UNIVERSITÄT MAINZ

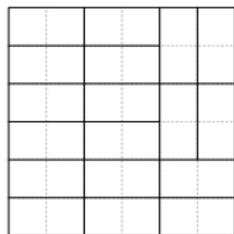
# Dominos und Pflasterbarkeit

Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



# Dominos und Pflasterbarkeit

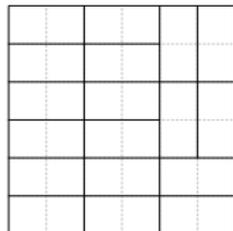
Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



pflasterbar

# Dominos und Pflasterbarkeit

Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



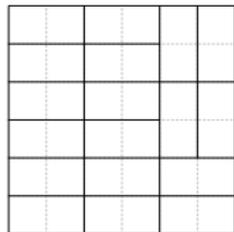
pflasterbar



nicht pflaster-  
bar:  $2 \nmid 5 \cdot 7$

# Dominos und Pflasterbarkeit

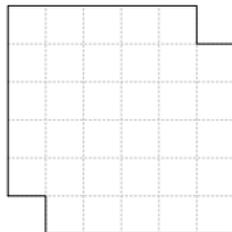
Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



pflasterbar

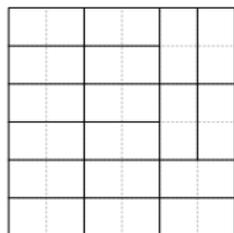


nicht pflaster-  
bar:  $2 \nmid 5 \cdot 7$



# Dominos und Pflasterbarkeit

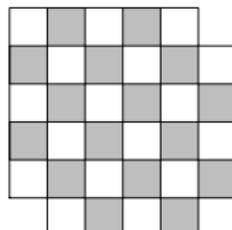
Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



pflasterbar



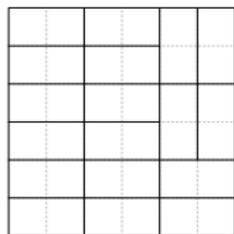
nicht pflasterbar:  
 $2 \nmid 5 \cdot 7$



nicht pflasterbar:  
18 weiße, 16 schwarze Kästchen

# Dominos und Pflasterbarkeit

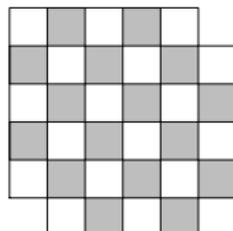
Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



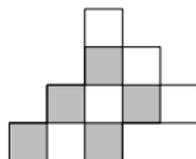
pflasterbar



nicht pflasterbar:  
 $2 \nmid 5 \cdot 7$

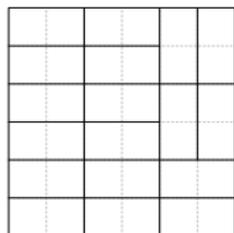


nicht pflasterbar:  
18 weiße, 16 schwarze Kästchen



# Dominos und Pflasterbarkeit

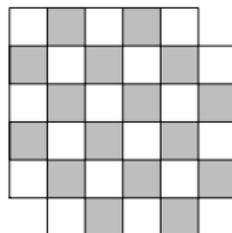
Welche Bereiche lassen sich lückenlos mit Dominos  oder  pflastern?



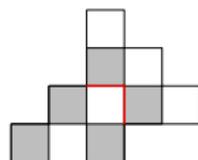
pflasterbar



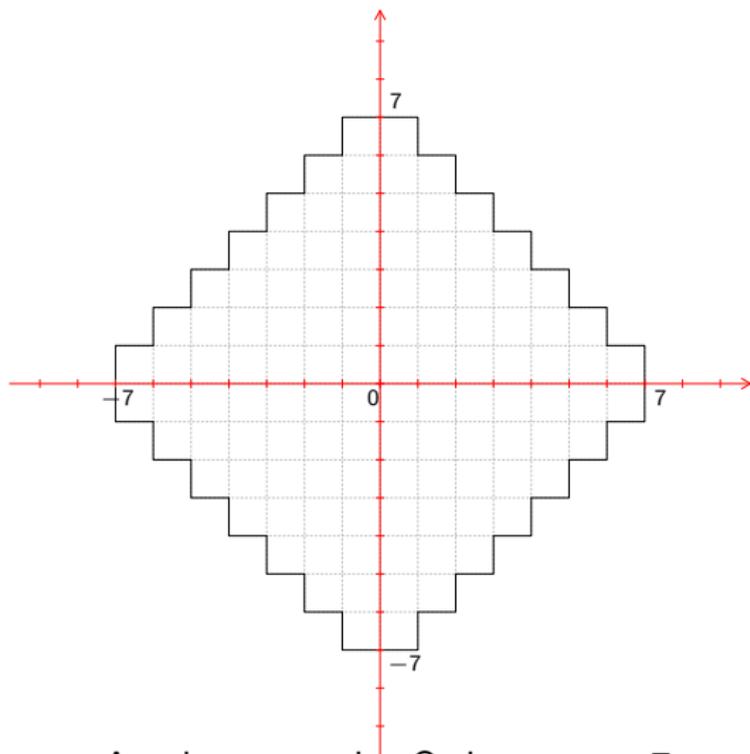
nicht pflasterbar:  $2 \nmid 5 \cdot 7$



nicht pflasterbar: 18 weiße, 16 schwarze Kästchen

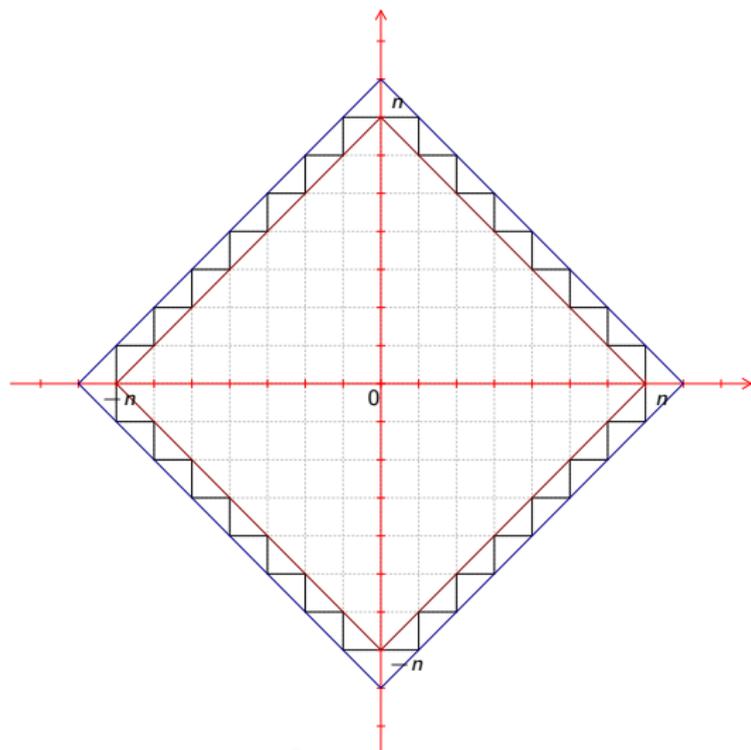


nicht pflasterbar: Teilgebiet links unterhalb der roten Kurve hat Schwarz-Überschuß, aber nur schwarze Nachbarfelder



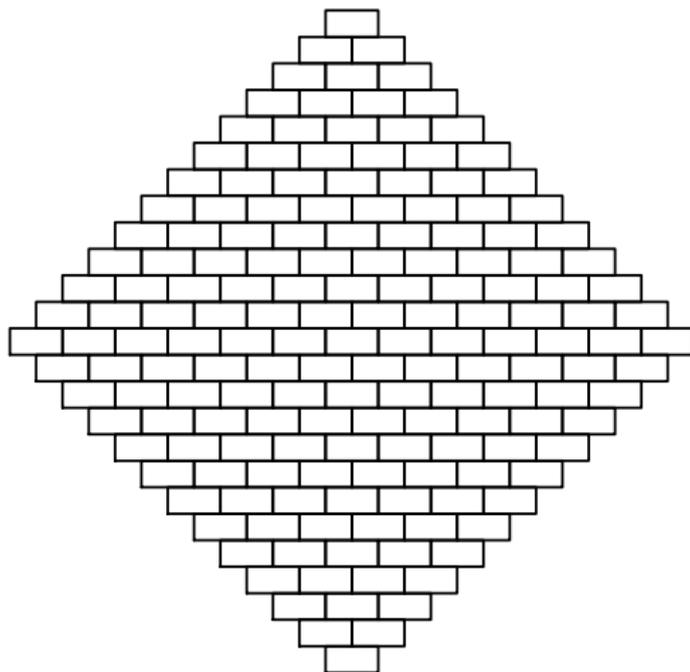
Aztekenraute der Ordnung  $n = 7$

# Aztekenraute

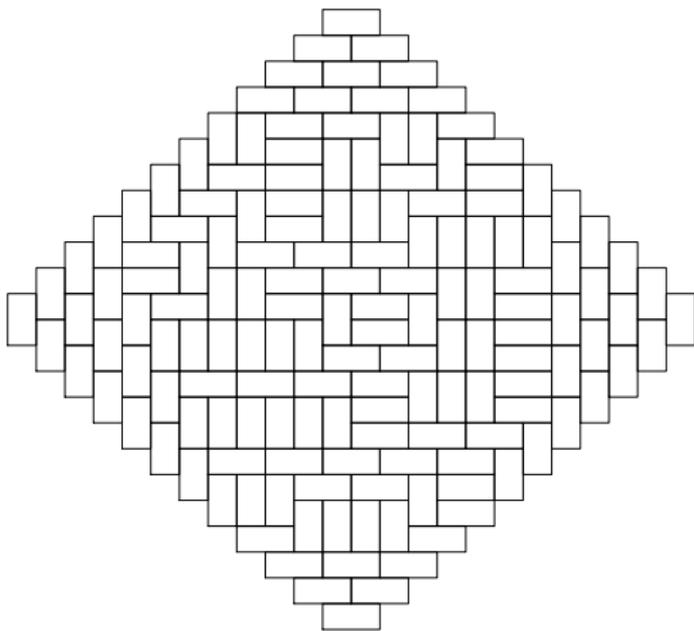


Bem.: Die Aztekenraute der Ordnung  $n$  hat Flächeninhalt  $2n(n+1)$ .

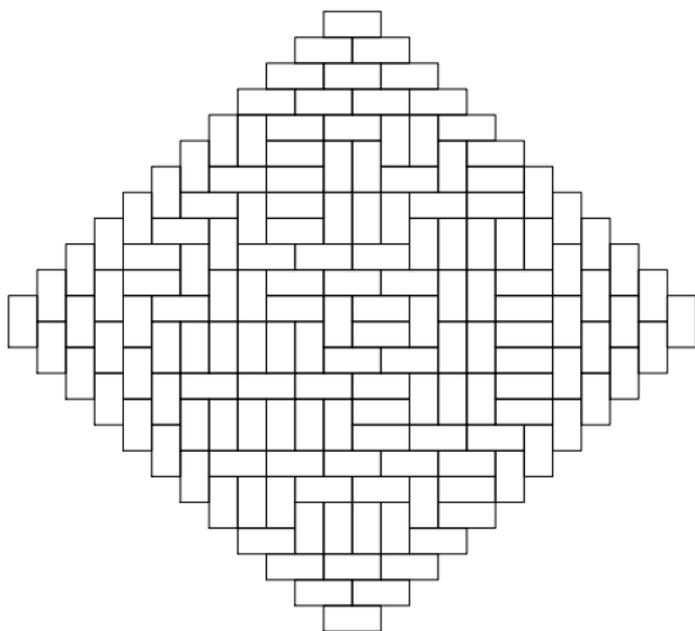
Die Aztekenraute ist pflasterbar:



# Eine zufällige Domino-Pflasterung der AR(12)



## Eine zufällige Domino-Pflasterung der AR(12)

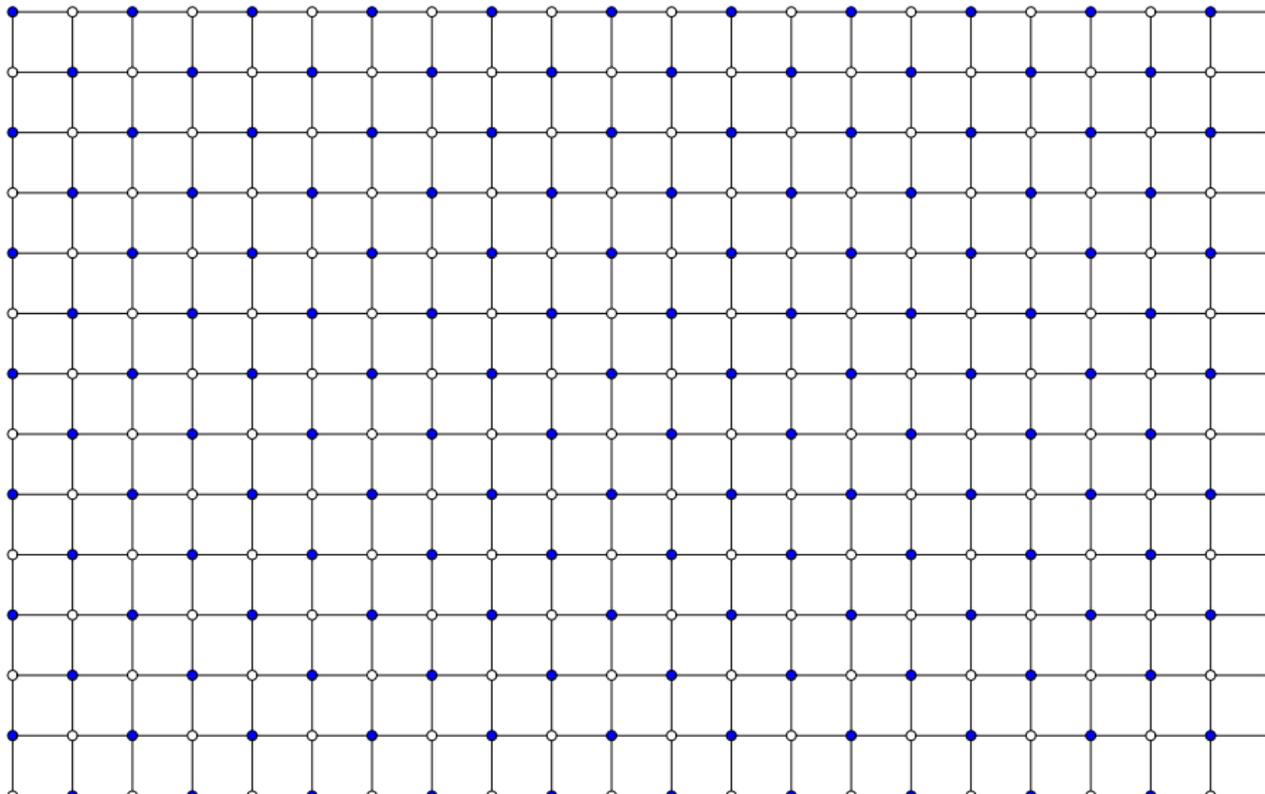


Wir werden sehen: Es gibt  $2^{n(n+1)/2}$  verschiedene Dominopflasterungen der  $AD(n)$ .

(Für  $n = 12$ :  $2^{78} \approx 3 \cdot 10^{23}$ )

## Ungerade und gerade

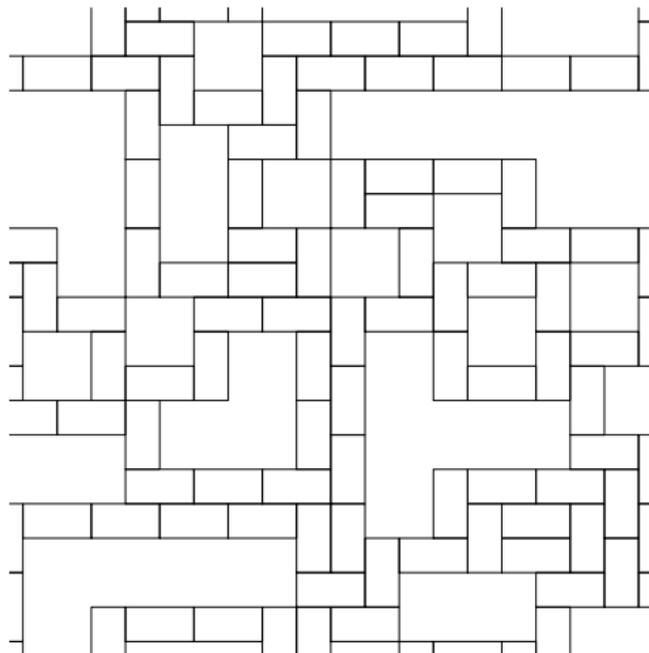
Gitterpunkte mit (un)gerader Koordinatensumme heißen (un)gerade.



## Definition

Eine (Teil-)Pflasterung  $P$  der Ebene heißt *ungerade-Block-frei*, wenn sie keinen ungeraden Block enthält und der nicht überdeckte Bereich aus ungeraden Blöcken zusammengesetzt werden kann.

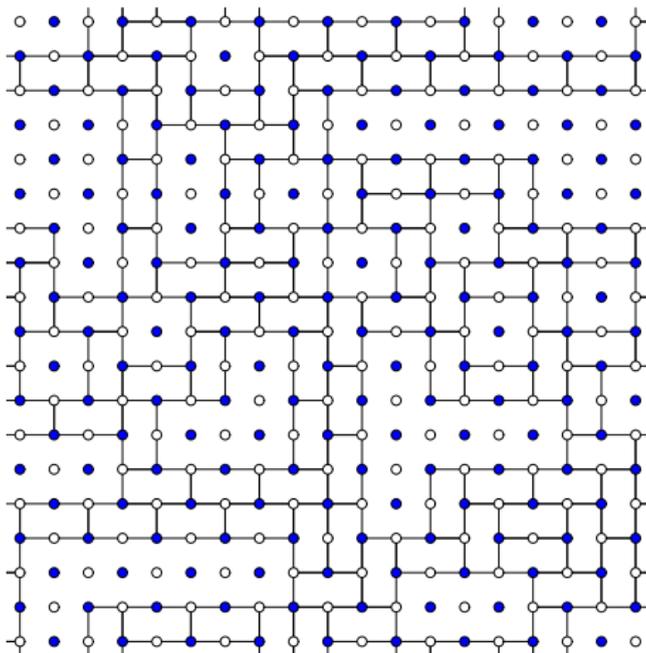
(Analog: *gerade-Block-frei*)



## Definition

Eine (Teil-)Pflasterung  $P$  der Ebene heißt *ungerade-Block-frei*, wenn sie keinen ungeraden Block enthält und der nicht überdeckte Bereich aus ungeraden Blöcken zusammengesetzt werden kann.

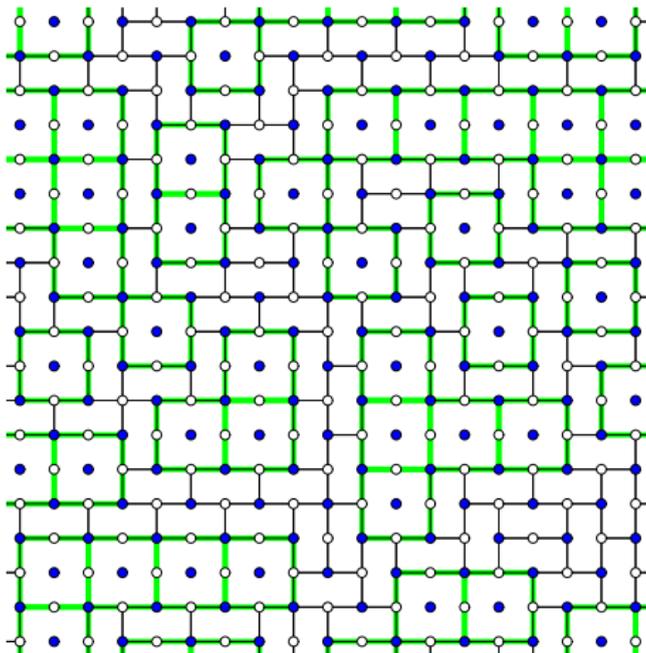
(Analog: *gerade-Block-frei*)



## Definition

Eine (Teil-)Pflasterung  $P$  der Ebene heißt *ungerade-Block-frei*, wenn sie keinen ungeraden Block enthält und der nicht überdeckte Bereich aus ungeraden Blöcken zusammengesetzt werden kann.

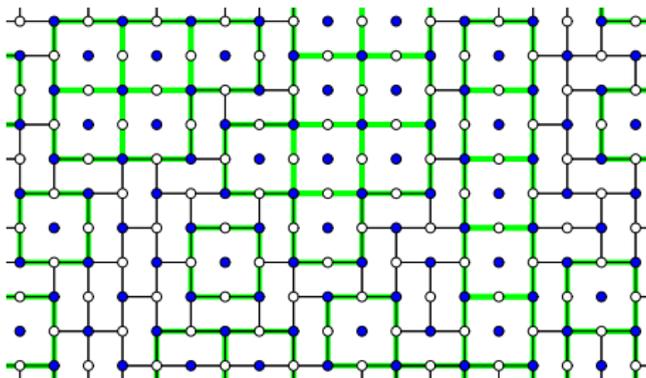
(Analog: *gerade-Block-frei*)



## Definition

Eine (Teil-)Pflasterung  $P$  der Ebene heißt *ungerade-Block-frei*, wenn sie keinen ungeraden Block enthält und der nicht überdeckte Bereich aus ungeraden Blöcken zusammengesetzt werden kann.

(Analog: *gerade-Block-frei*)



## Lemma

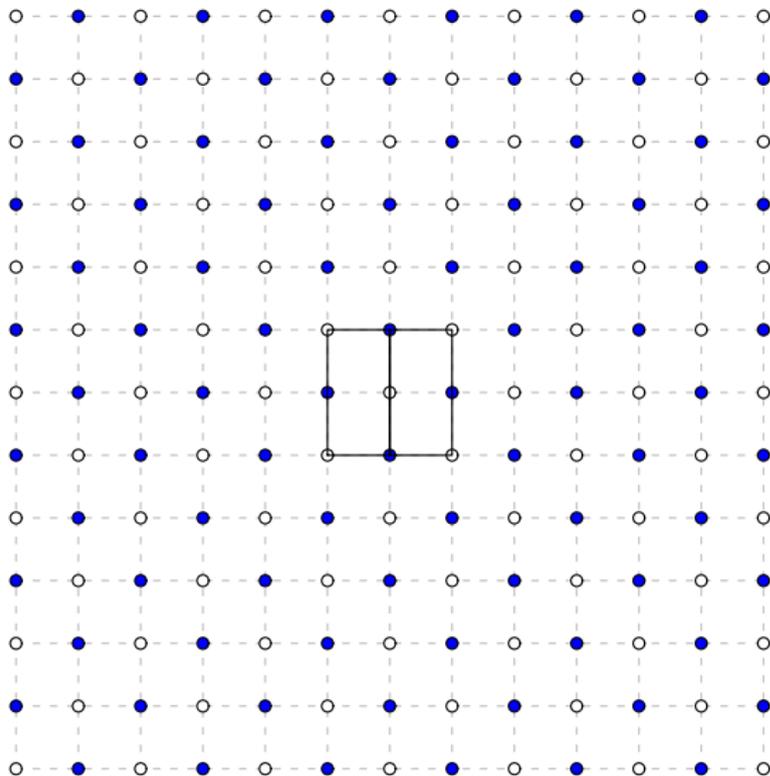
Sei  $P$  eine ungerade-Block-freie (Teil-)Pflasterung der Ebene. Dann ist  $\tilde{P} := V_u(P)$  ebenfalls eine ungerade-Block-freie (Teil-)Pflasterung und es gilt  $V_u(\tilde{P}) = P$ .

Analog für  $P$  gerade-Block-frei und  $V_g$ .

# Domino-Shuffling

$n = 1$

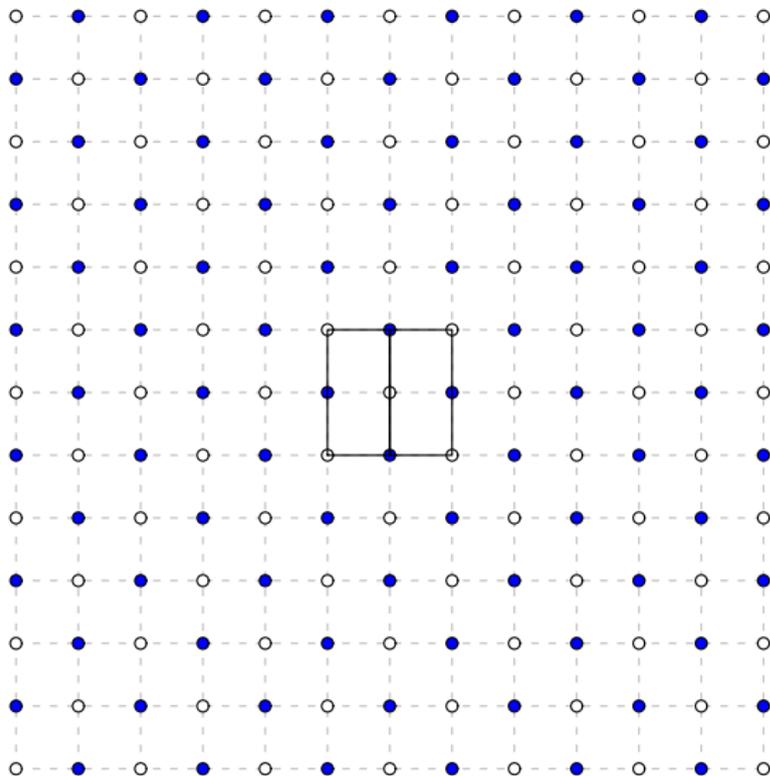
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 1$

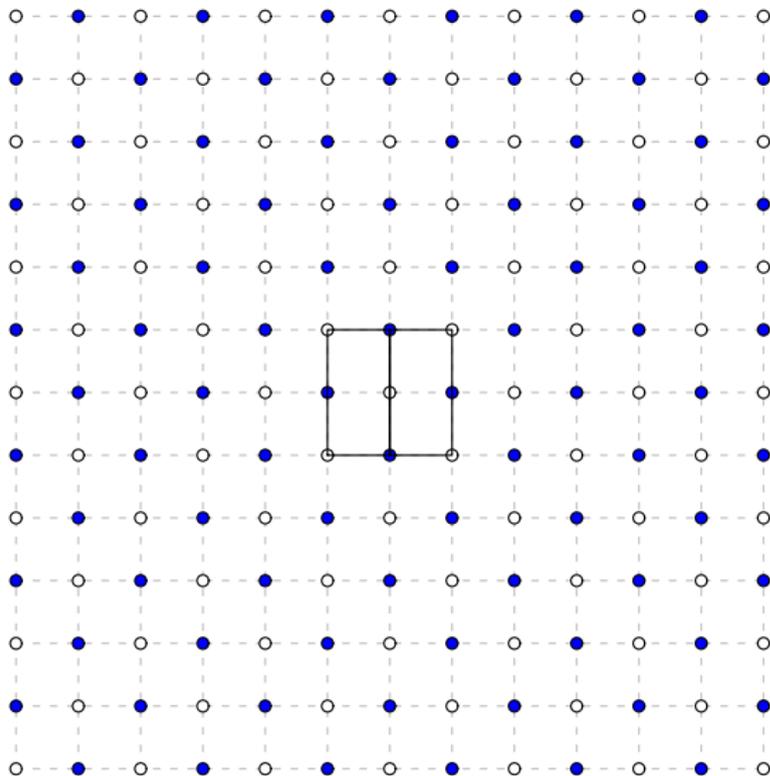
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 1$

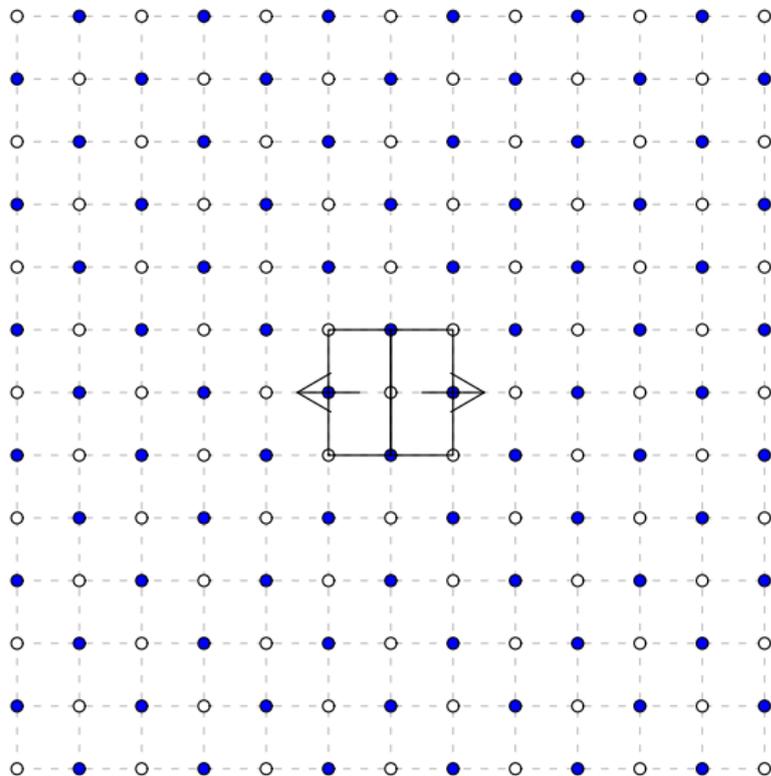
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 1$

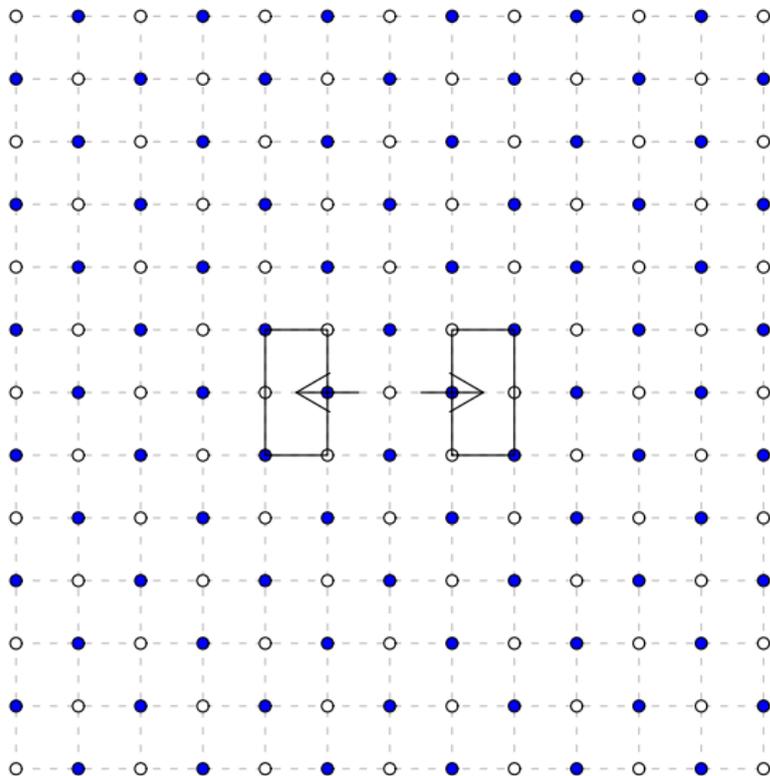
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 1$

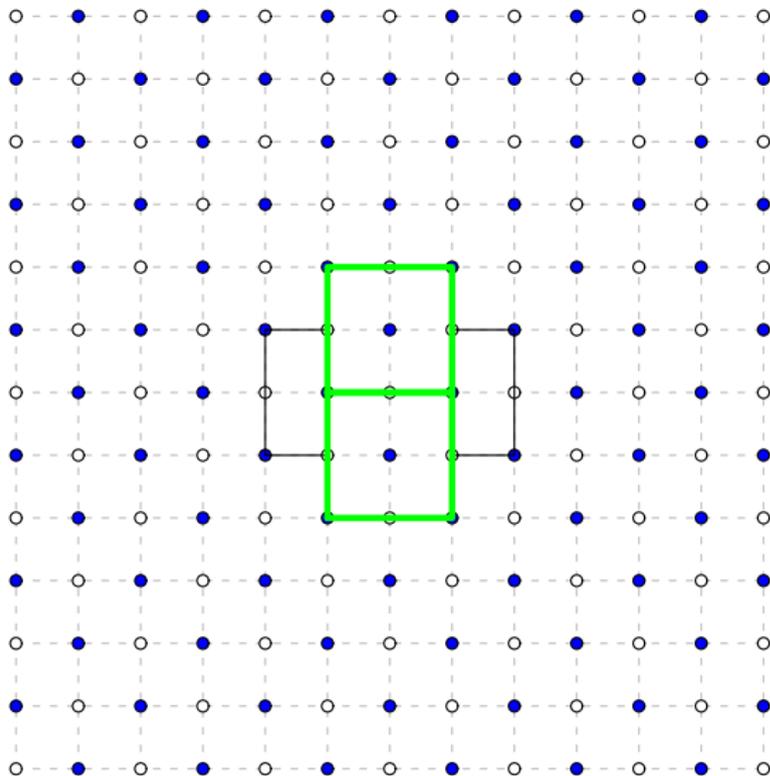
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde LÖcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 1$

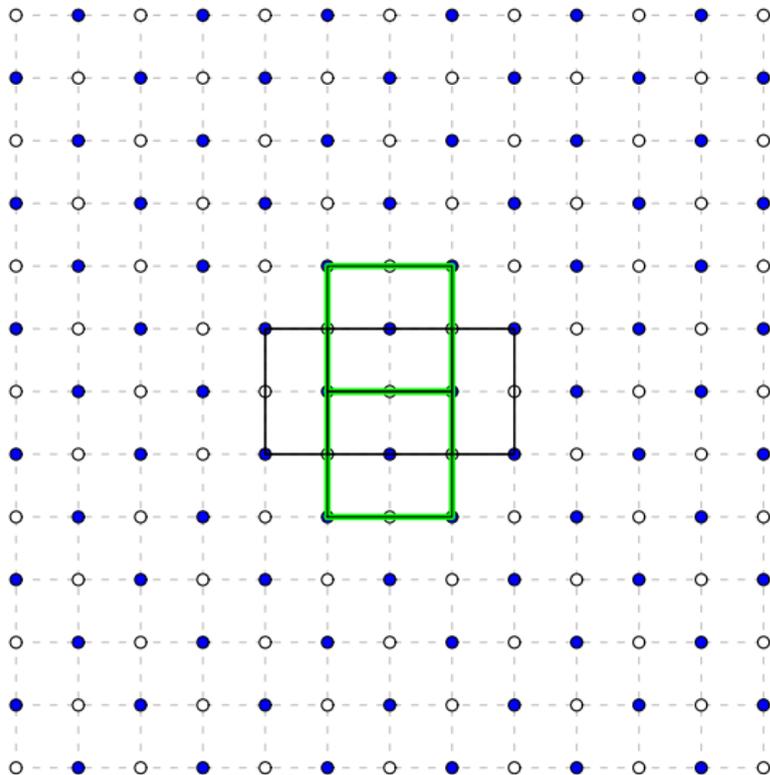
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 1$

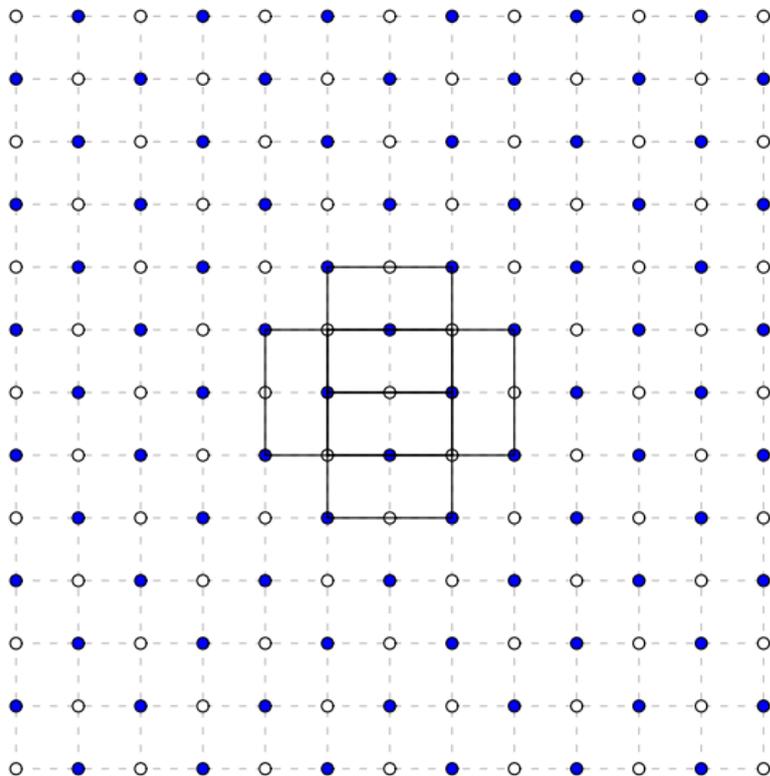
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 2$

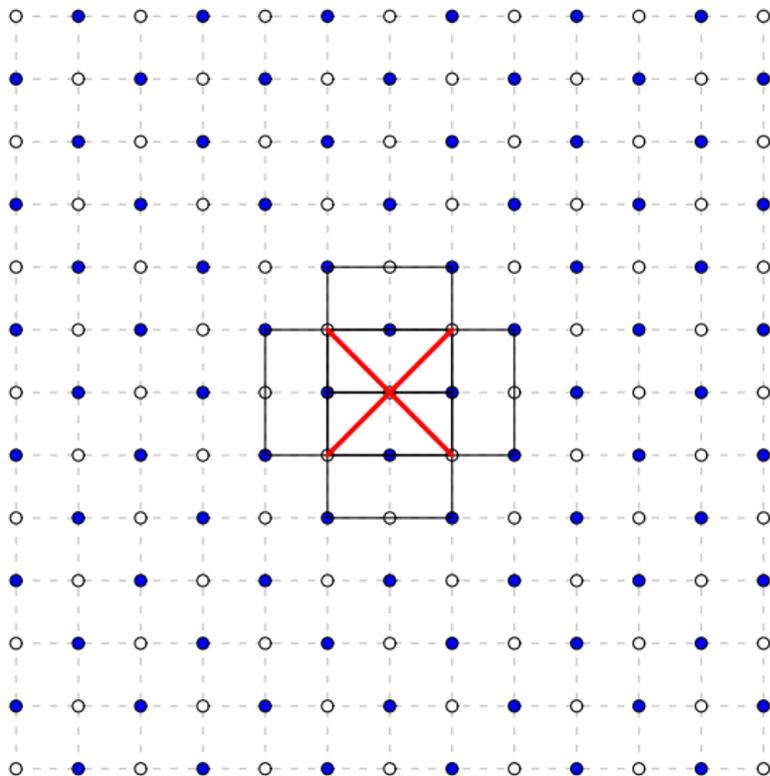
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$$n = 2$$

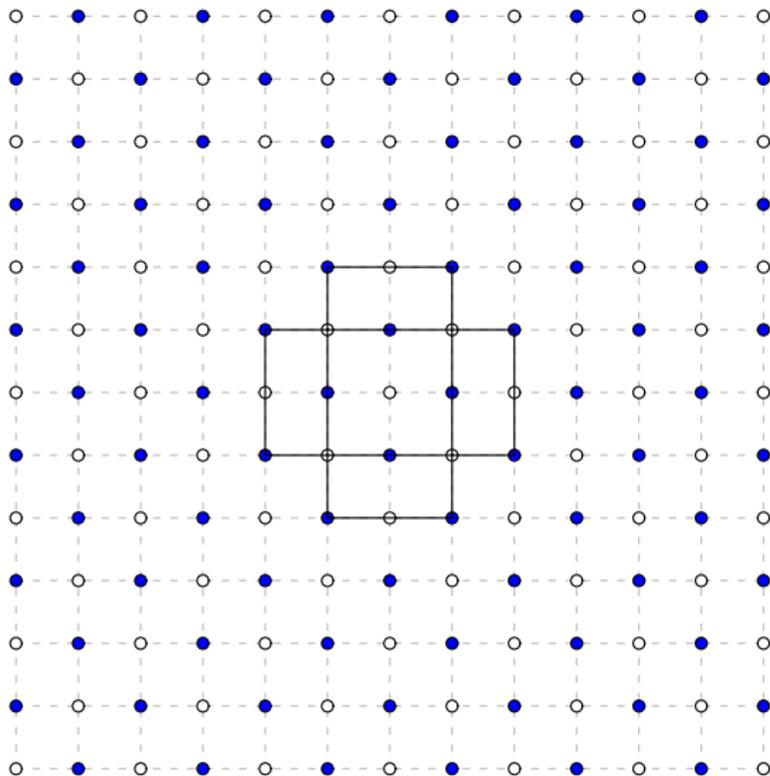
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 2$

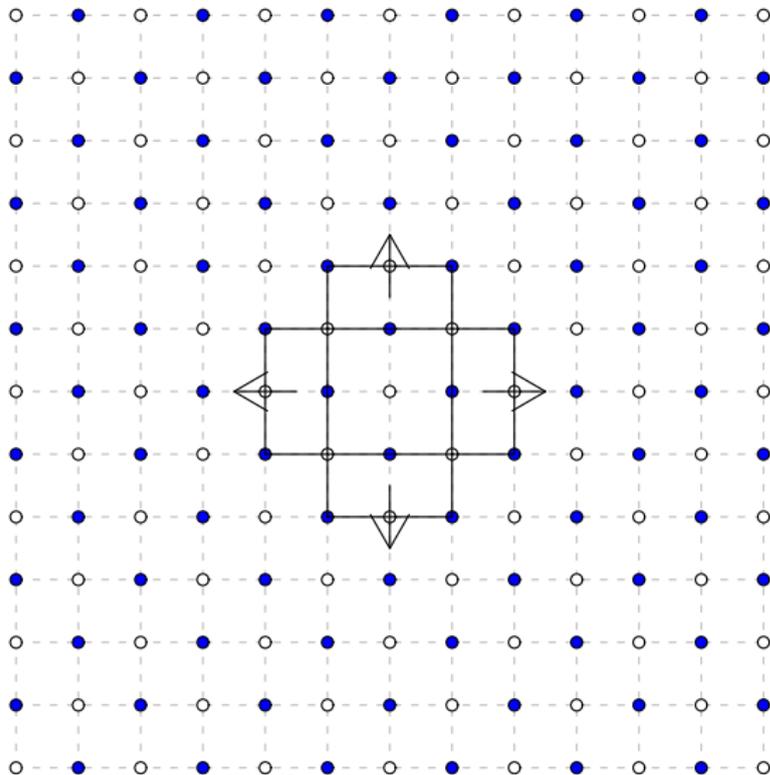
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 2$

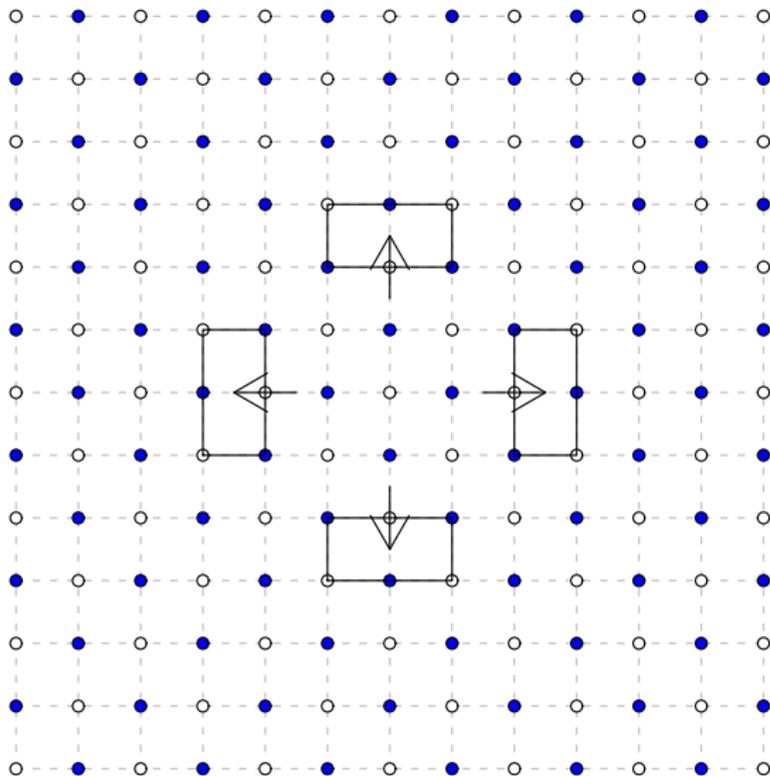
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 2$

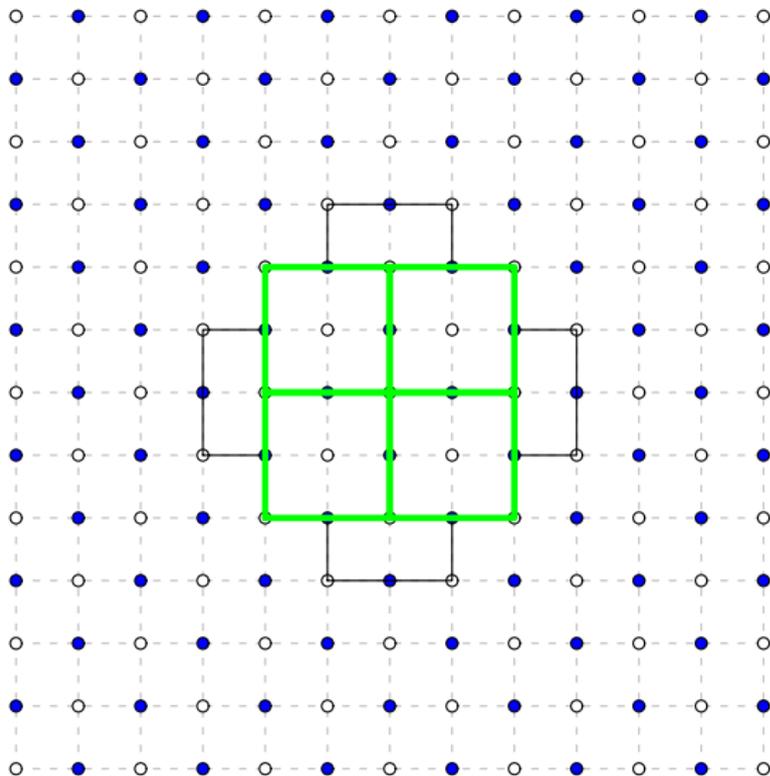
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 2$

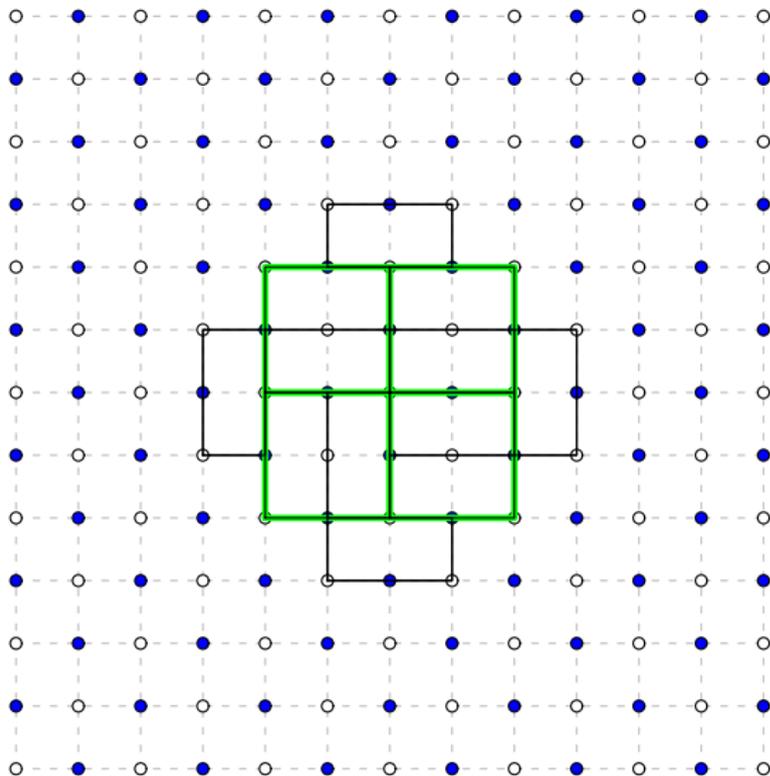
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$$n = 2$$

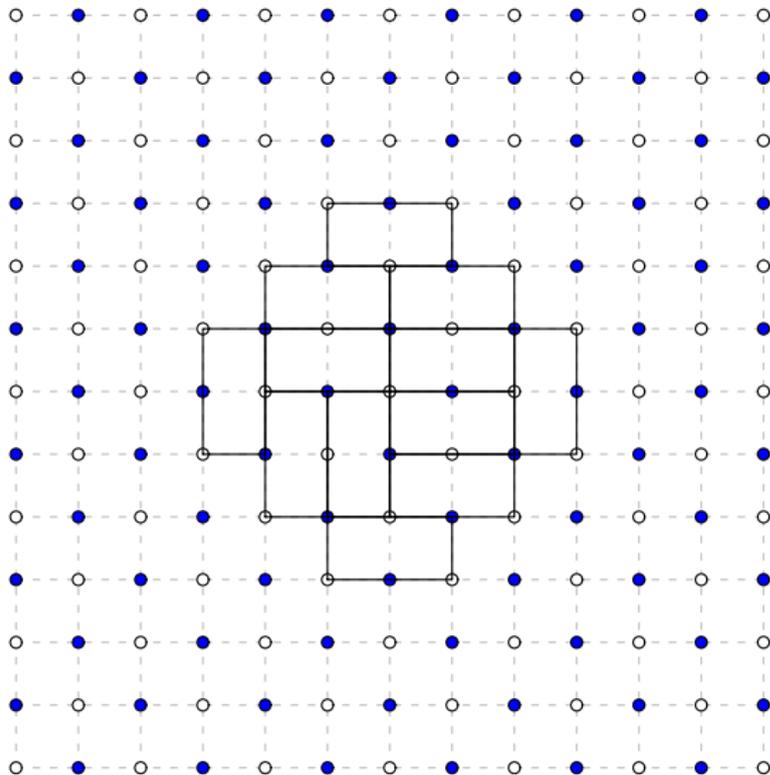
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 3$

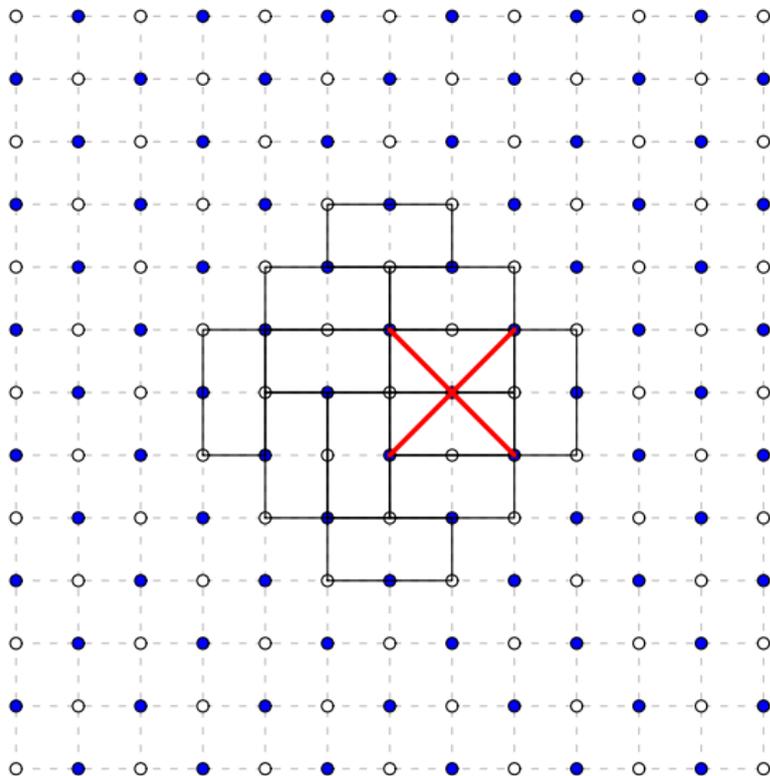
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 3$

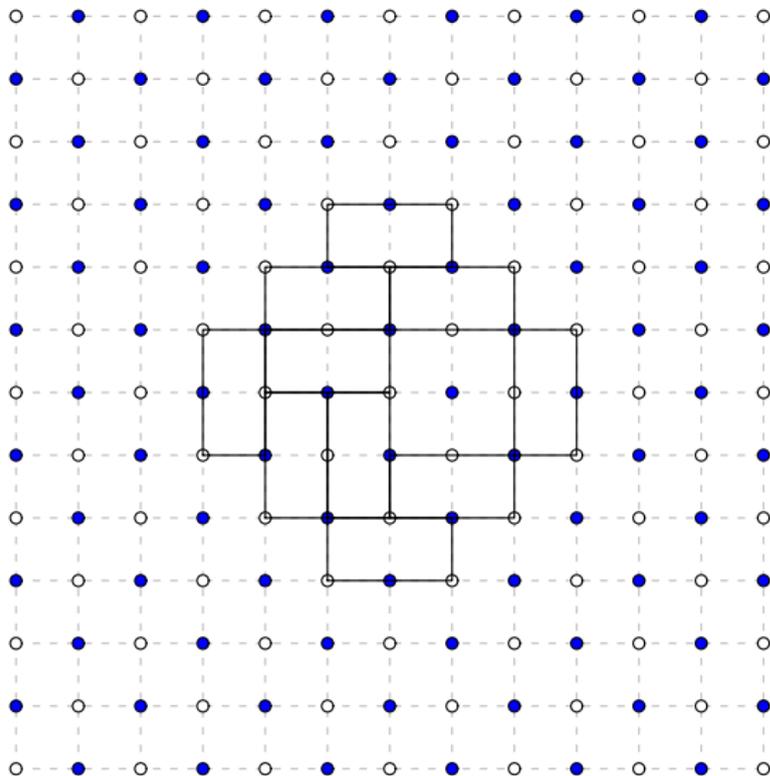
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 3$

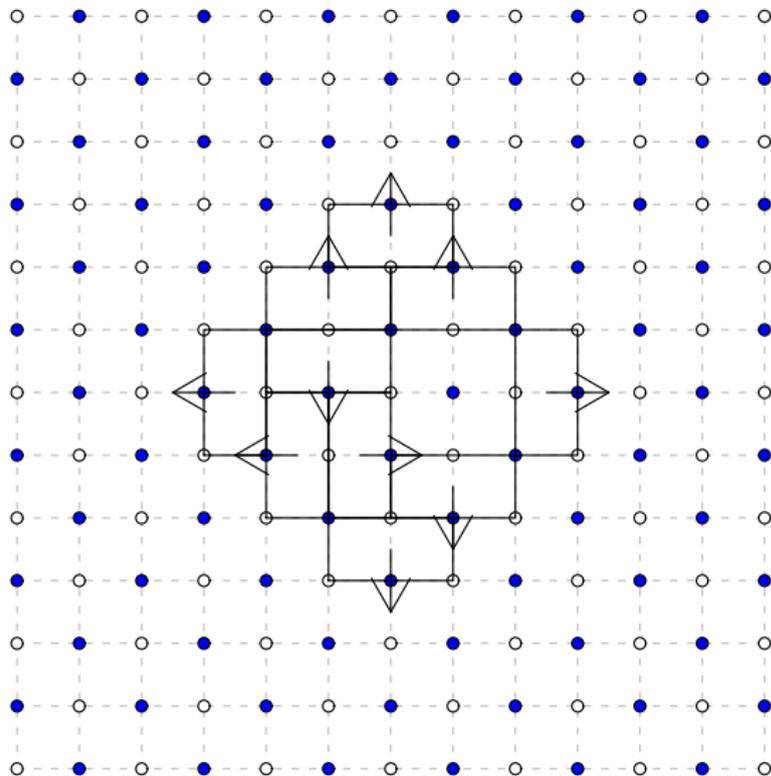
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 3$

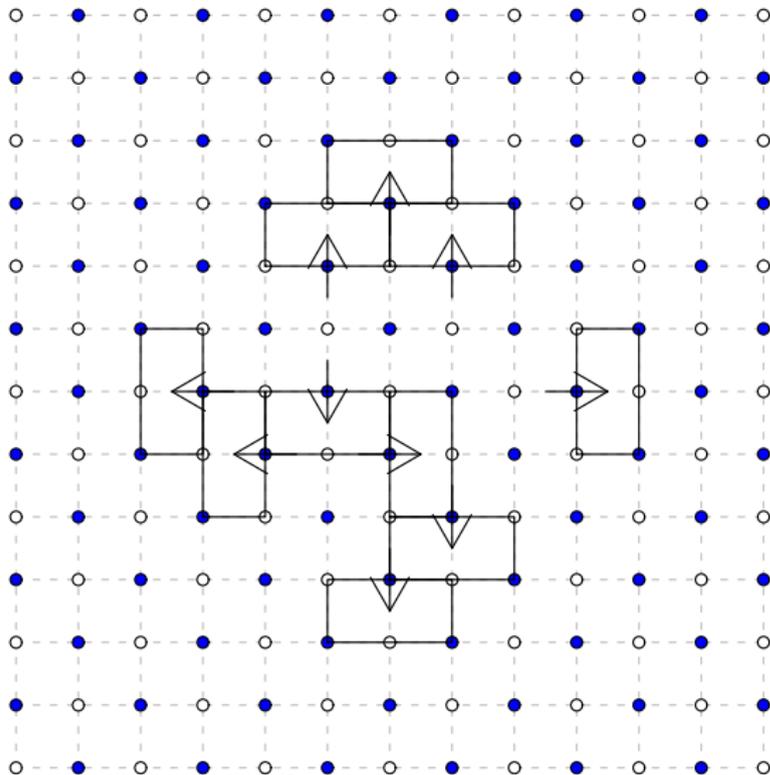
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 3$

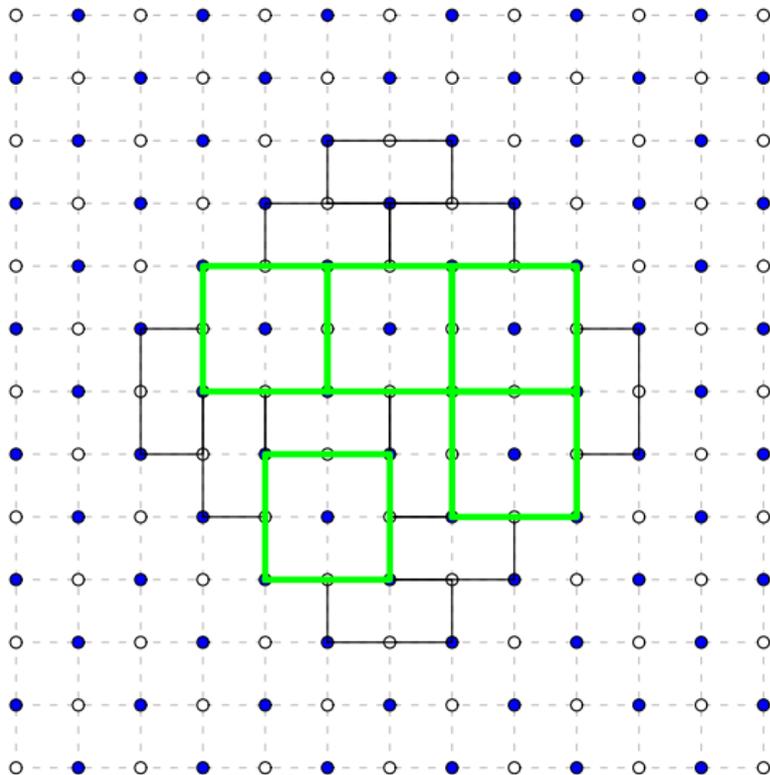
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 3$

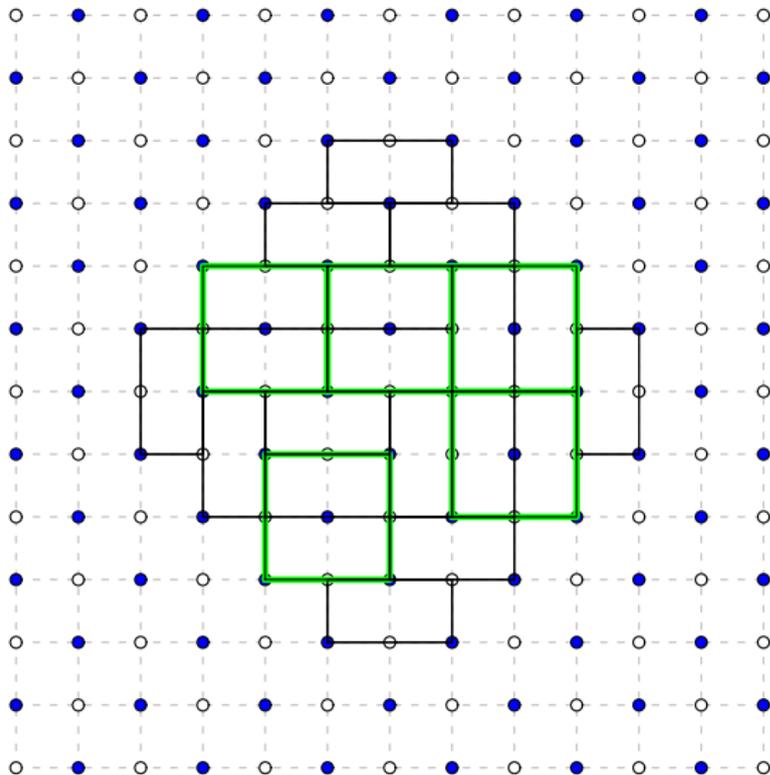
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 3$

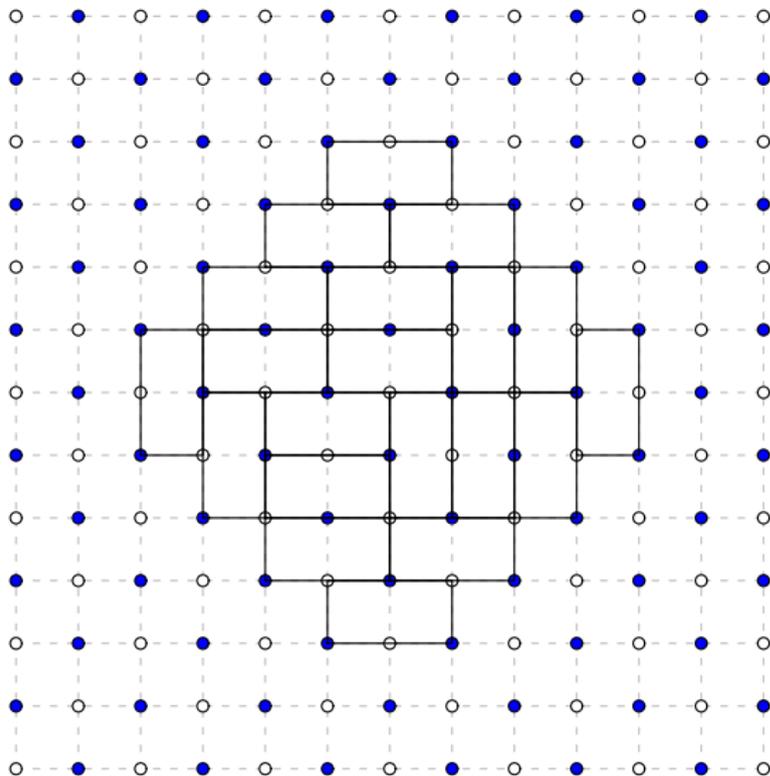
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 4$

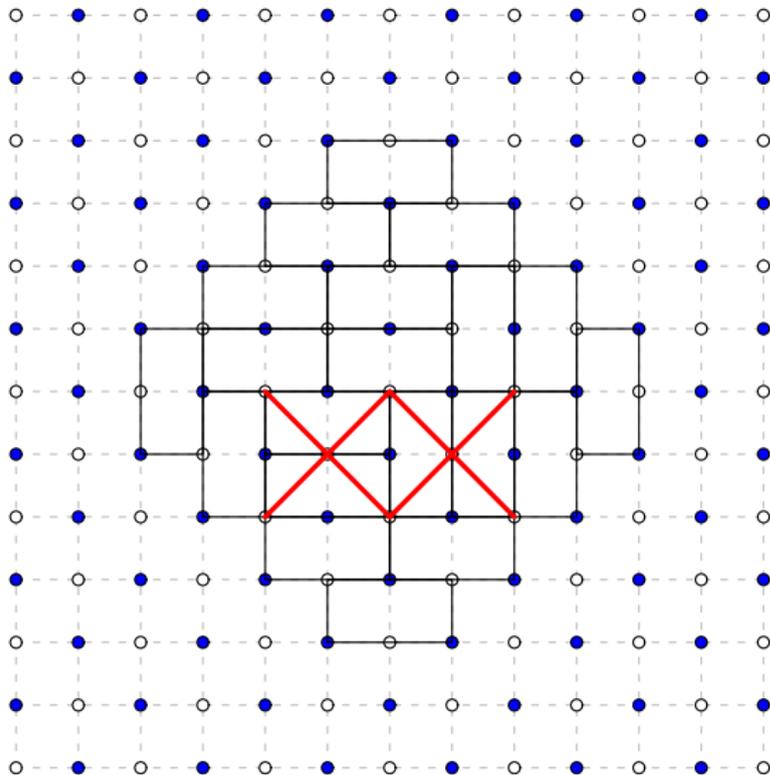
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 4$

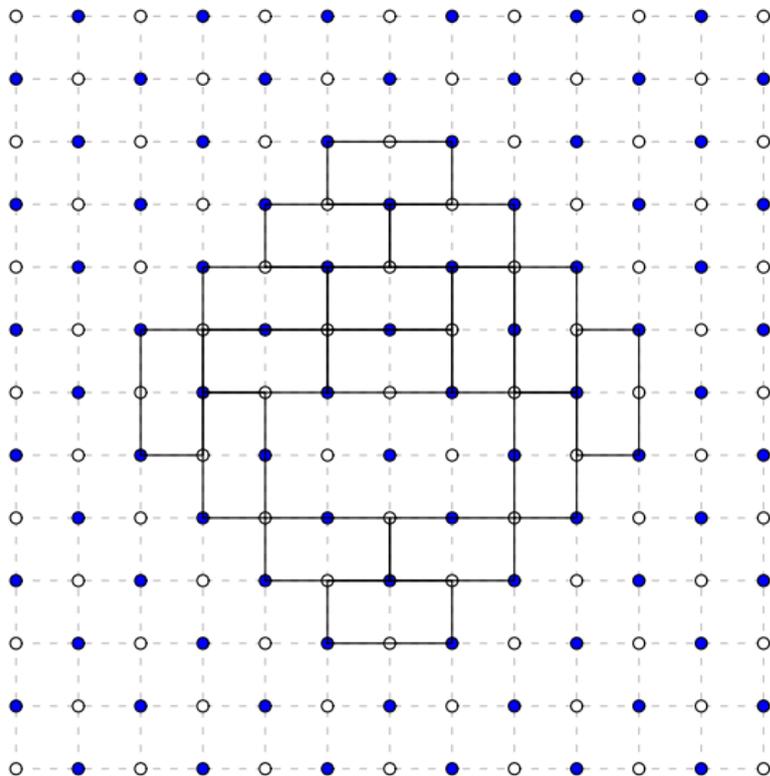
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Llöcher, füle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$$n = 4$$

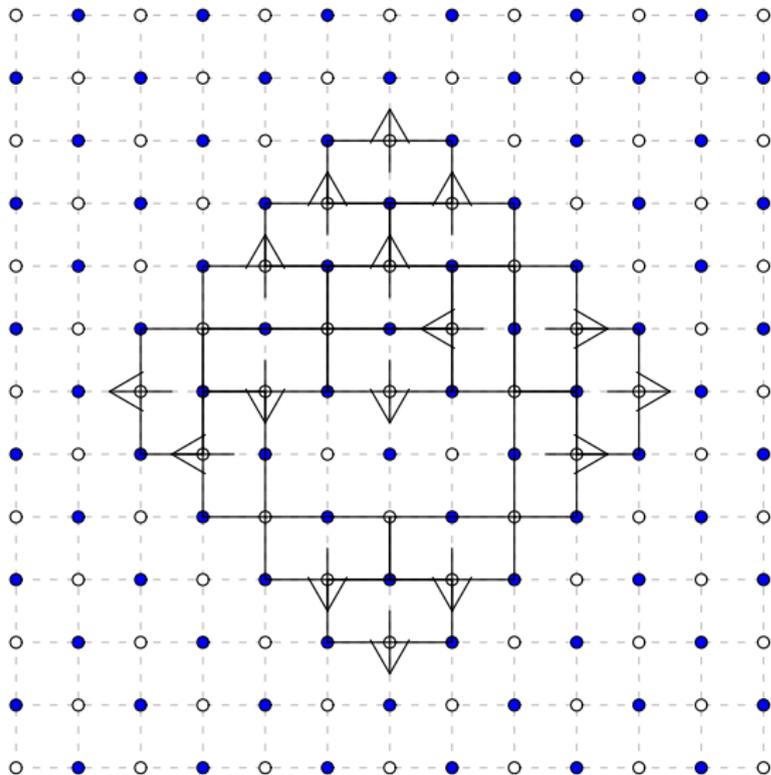
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Llöcher, füle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 4$

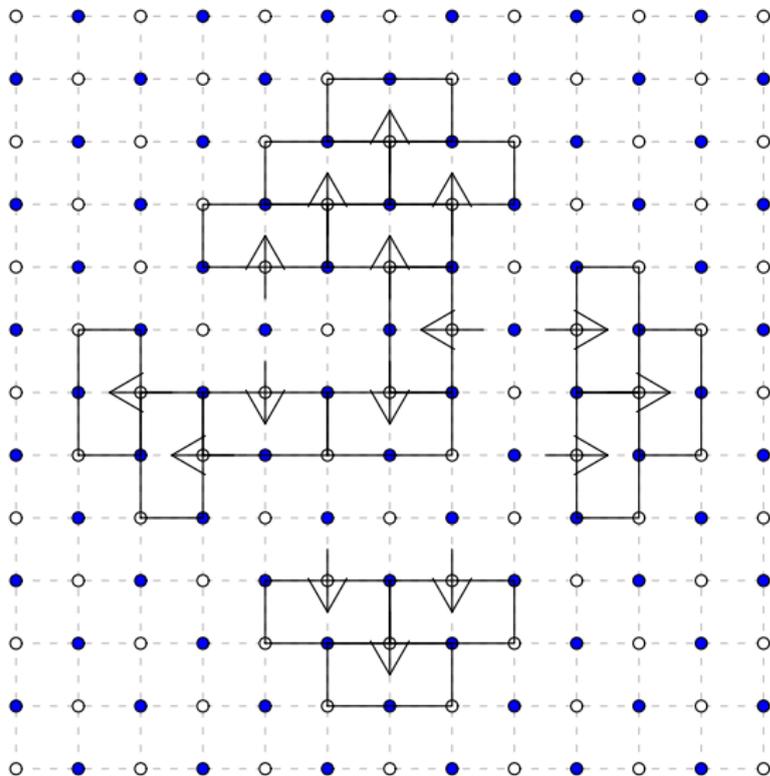
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 4$

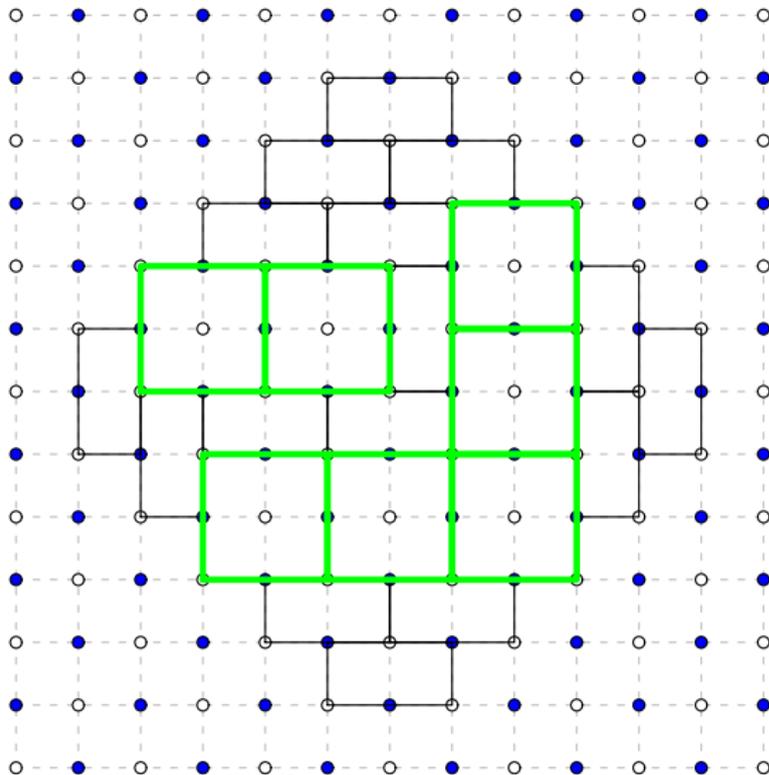
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 4$

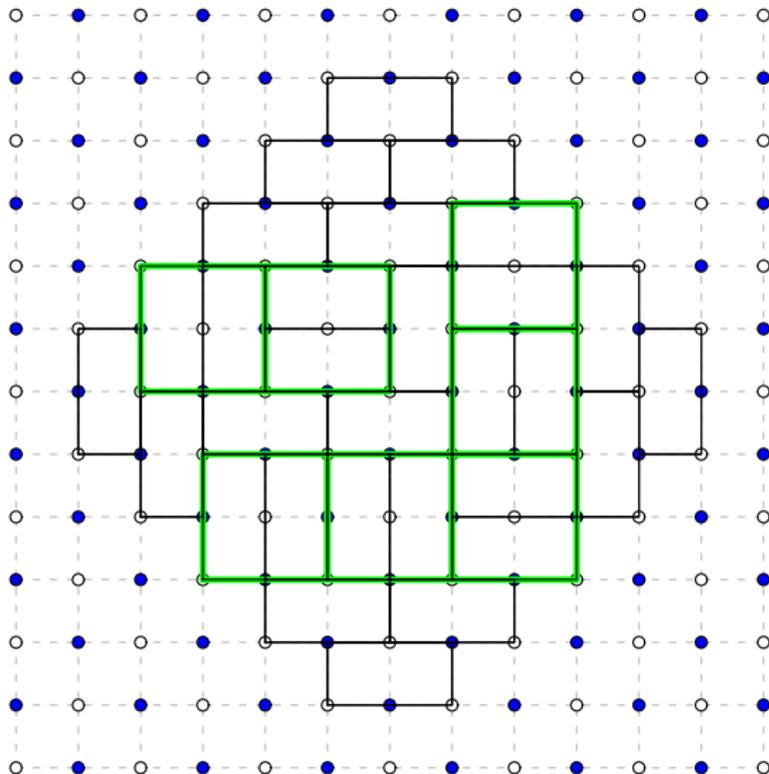
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$$n = 4$$

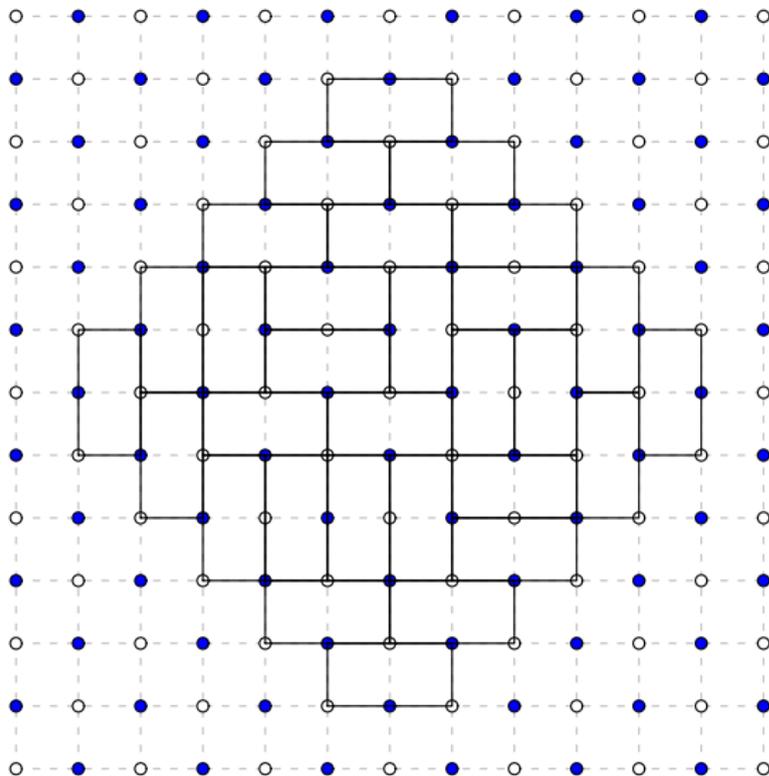
- Lösche gerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit geraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 5$

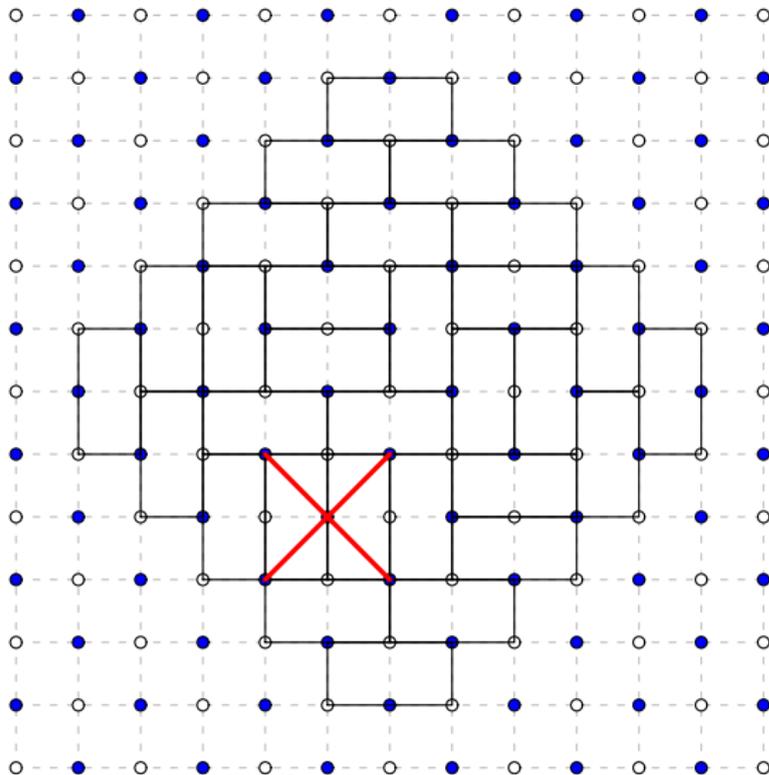
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 5$

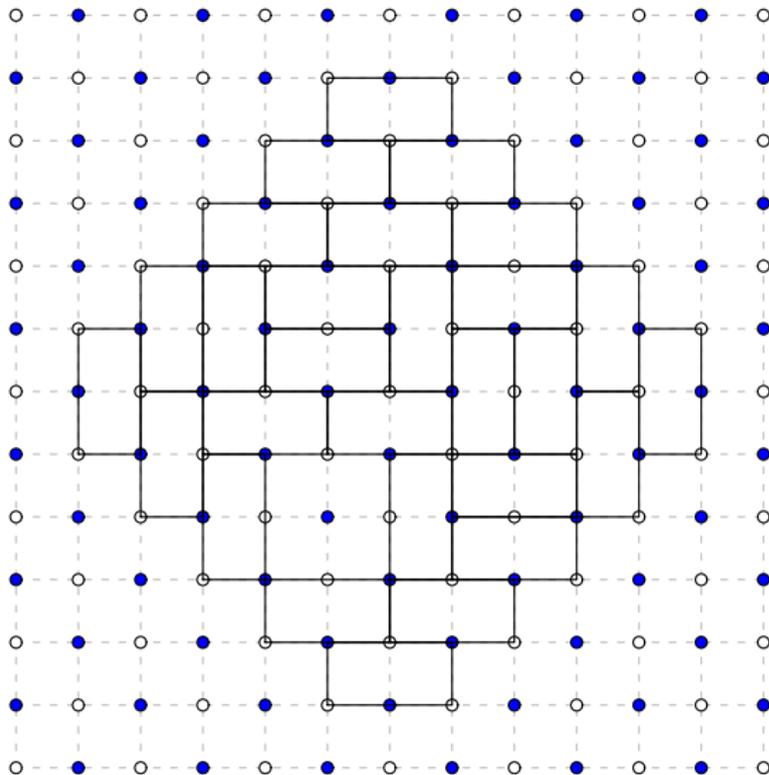
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 5$

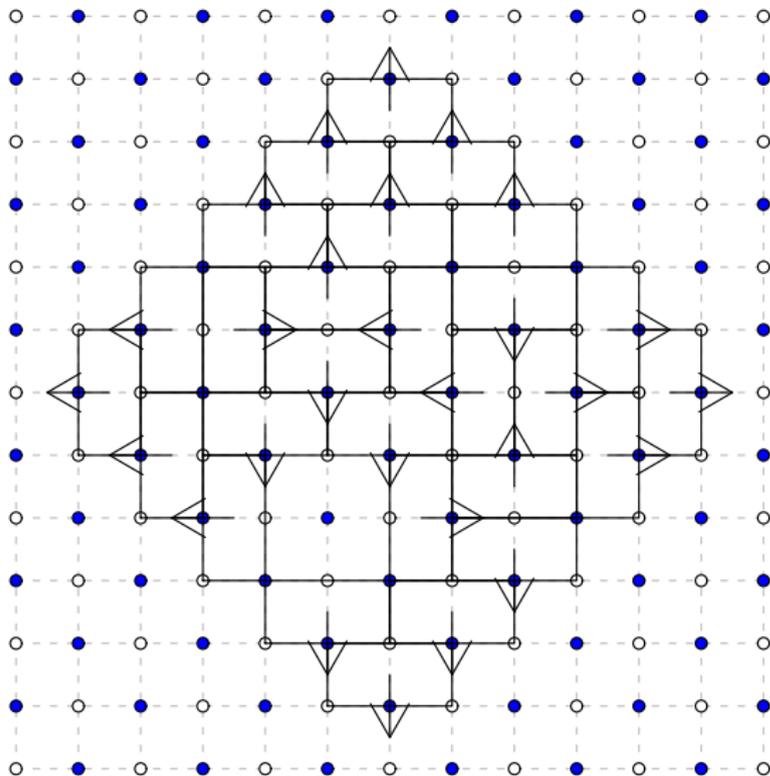
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 5$

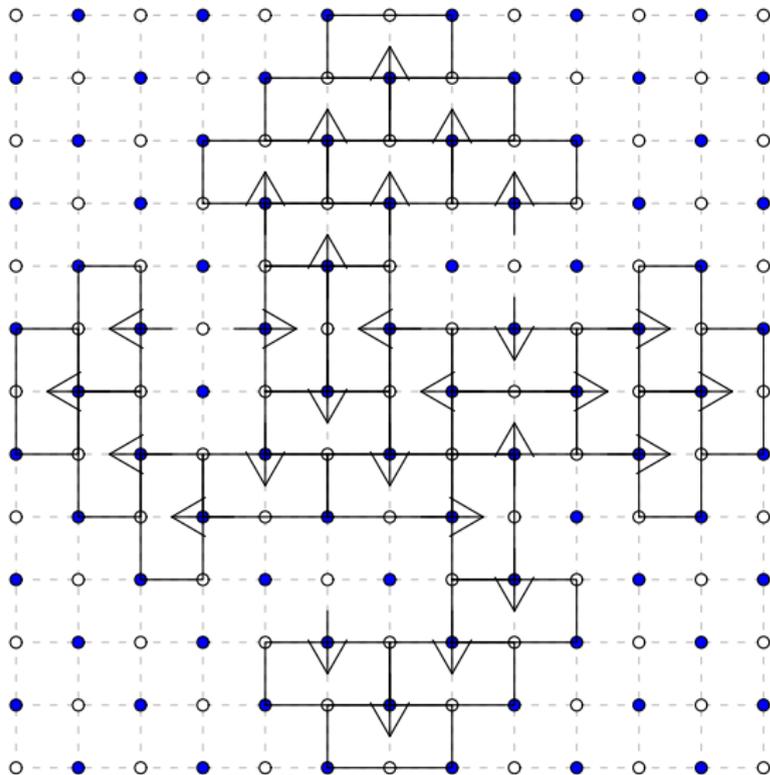
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 5$

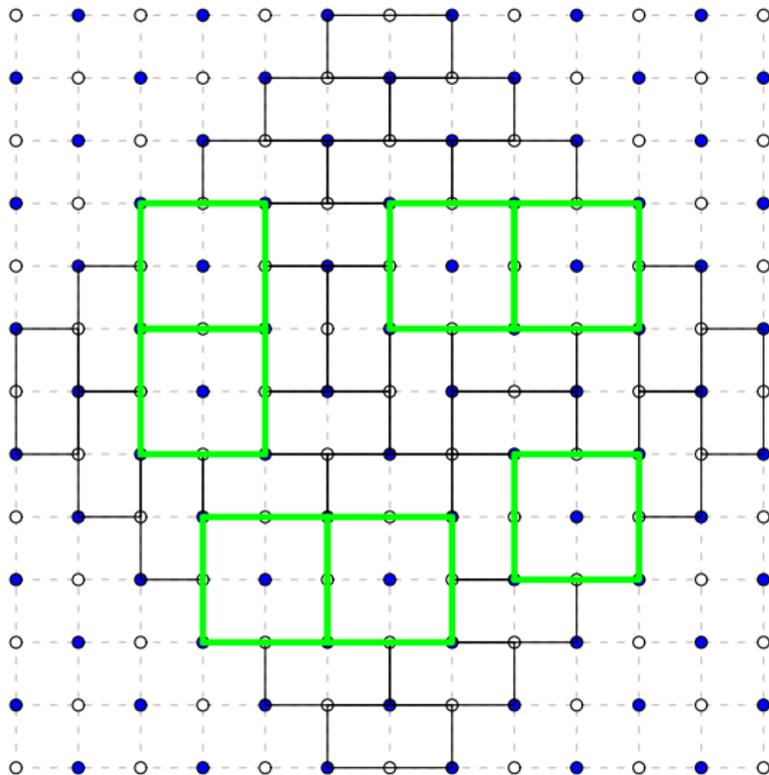
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 5$

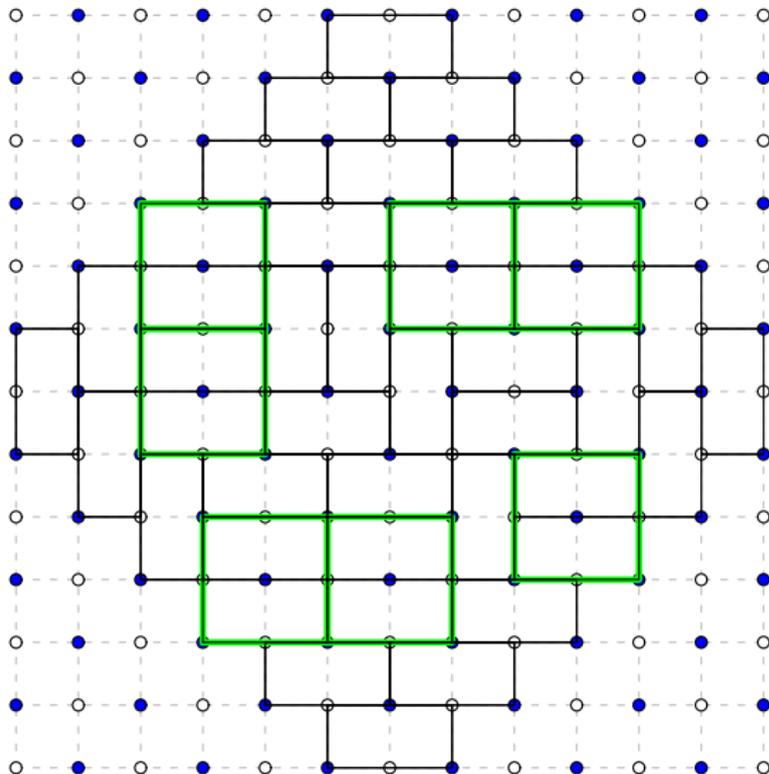
- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung



# Domino-Shuffling

$n = 5$

- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung

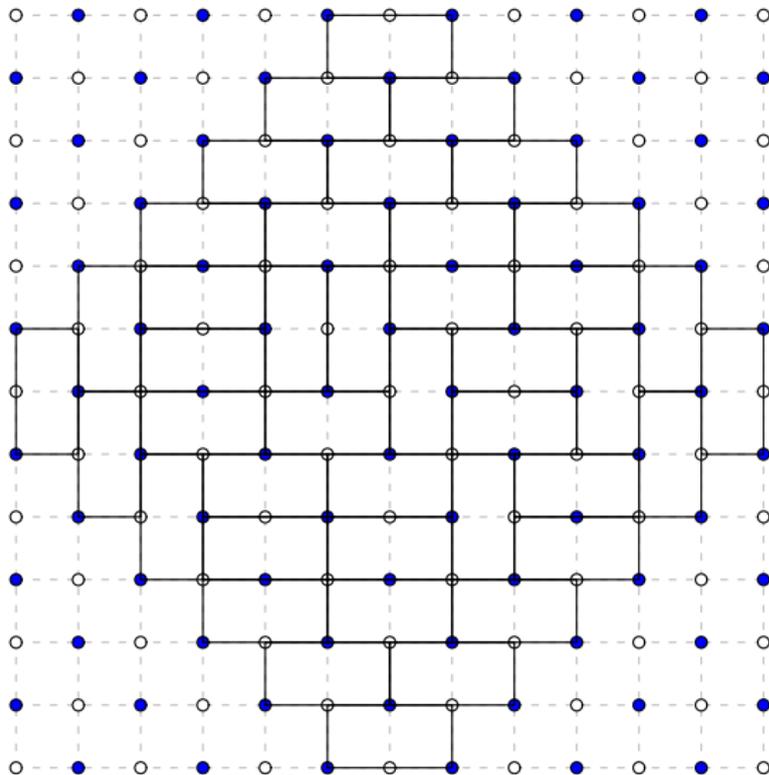




# Domino-Shuffling

$n = 5$

- Lösche ungerade Blöcke
- Verschiebe übriggebliebene Dominos
- Finde Löcher, fülle mit ungeraden Blöcken zufälliger Orientierung

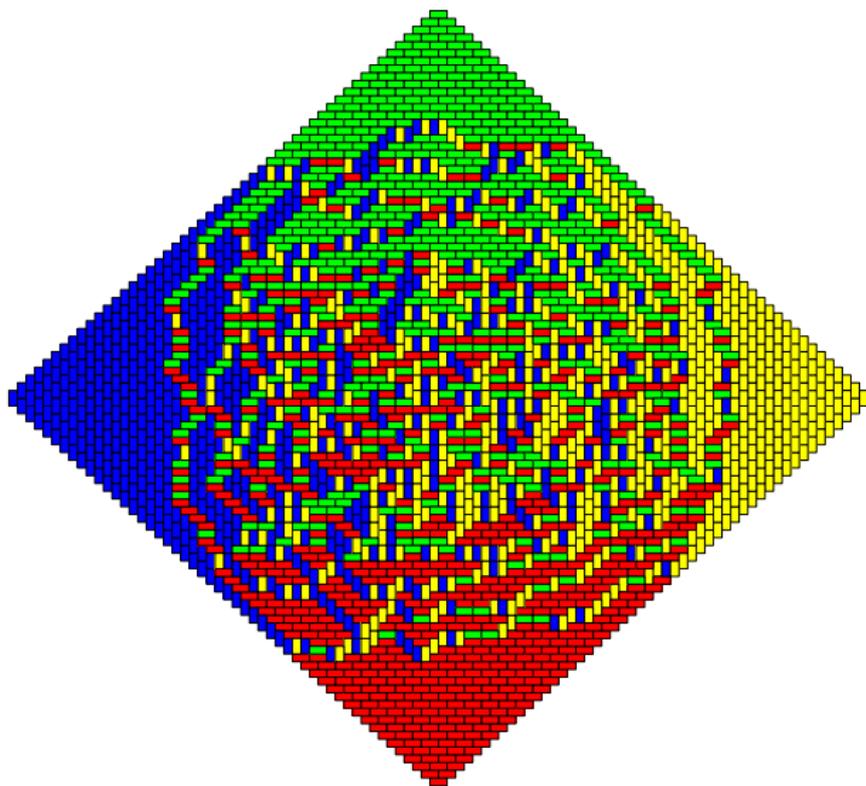


# Domino-Pflasterungen der Aztekenraute generieren und zählen

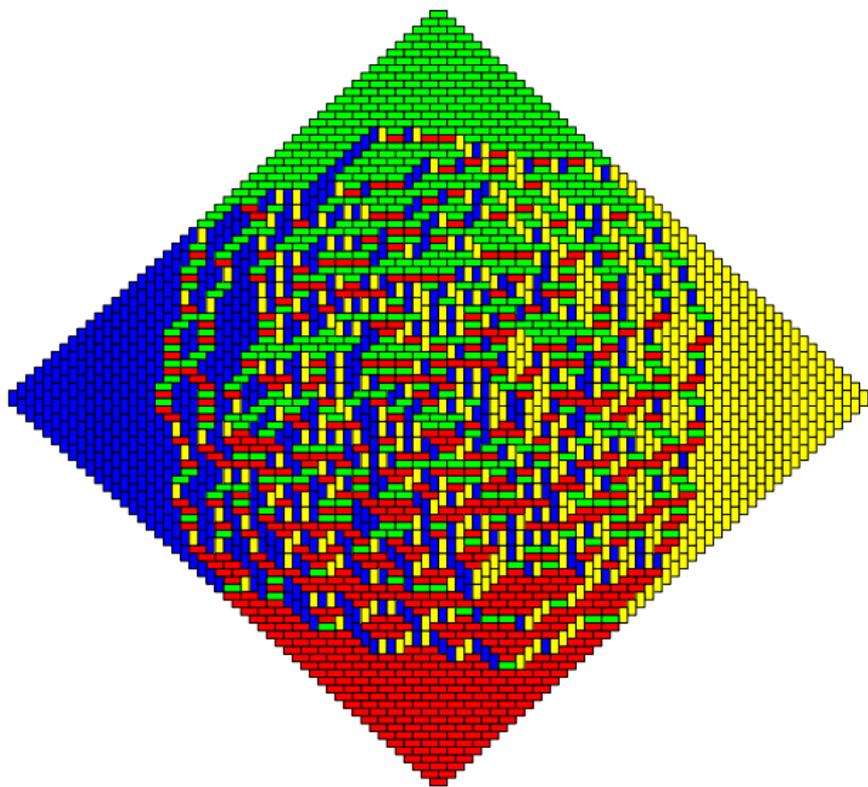
## Satz

- 1 Es gibt  $2^{n(n+1)/2}$  verschiedene Domino-Pflasterungen der Aztekenraute  $AR(n)$  der Ordnung  $n$ .
- 2  $(n - 1)$  Iterationen von domino shuffling erzeugen eine davon rein zufällig.
- 3  $n$  ungerade (bzw. gerade),  $P$  eine Pflasterung von  $AR(n + 1)$  mit  $k$  ungeraden (geraden) Blocks. Dann gibt es  $2^{k-n-1}$  verschiedene Pflasterungen  $P'$  von  $AR(n)$ , von denen aus  $P$  durch einen domino shuffling-Schritt erreicht werden kann. Für jedes solche  $P'$  ist die Wahrscheinlichkeit,  $P$  in einem domino shuffling-Schritt zu erreichen, gleich  $2^{-k}$ .

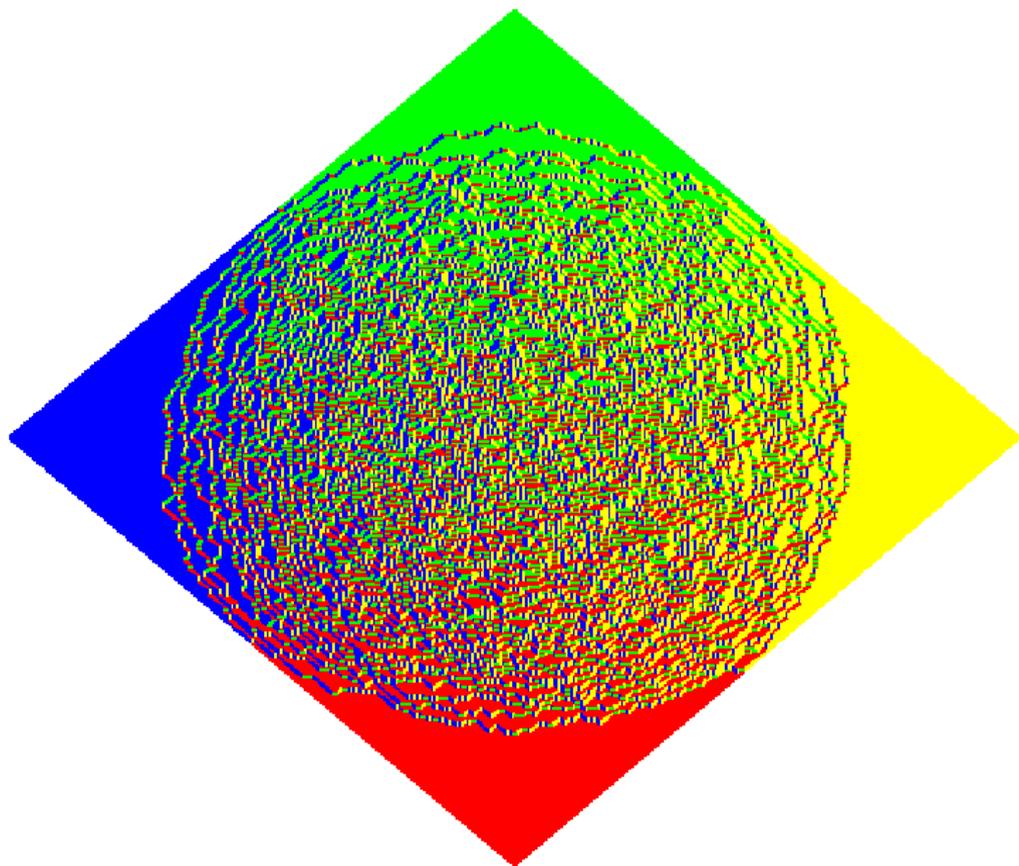
# Eine zufällige Domino-Pflasterung der AR(50)



# Eine andere zufällige Domino-Pflasterung der AR(50)



# Eine zufällige Domino-Pflasterung der AR(200)



Elkies, Noam; Kuperberg, Greg; Larsen, Michael; Propp, James:  
Alternating-sign matrices and domino tilings. I.

*J. Algebraic Combin.* 1 (1992), no. 2, 111–132.

Alternating-sign matrices and domino tilings. II.

*J. Algebraic Combin.* 1 (1992), no. 3, 219–234.

<http://de.arxiv.org/abs/math/9201305>

Jockusch, William; Propp, James; Shor, Peter:

Random Domino Tilings and the Arctic Circle Theorem.

[arxiv:math/9801068](http://arxiv.org/abs/math/9801068) (1998).

<http://de.arxiv.org/abs/math/9801068>