

## Übungen zur Angewandten Stochastik

## Blatt 1

**1. Aufgabe (Erinnerungen aus der Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie)**

a) Führen Sie eine Definition des Erwartungswerts ein (je nach Vorkenntnissen können Sie annehmen, dass  $X$  und  $Y$  nur abzählbar viele Werte annehmen oder jeweils eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzen). Seien  $X, Y$  reellwertige Zufallsvariablen (auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum) mit  $\mathbb{E}[|X|], \mathbb{E}[|Y|] < \infty$ ,  $a, b$  reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y] \quad \text{und} \quad X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y].$$

b) Folgern Sie die Tschebyscheff-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \delta) \leq \frac{1}{\delta^2} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \quad \text{für } \delta > 0.$$

c) Reellwertige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  (mit endlichem Erwartungswert) heißen *unkorreliert*, wenn  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ . Zeigen Sie das *schwache Gesetz der großen Zahlen* für unkorrelierte Zufallsvariablen: Seien  $X_1, X_2, \dots$  paarweise unkorrelierte Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ ,  $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ . Dann gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

**2. Aufgabe (Die Gamma-Familie)** Für  $s, a > 0$  heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\Gamma_{s,a}$  mit Dichte

$$\gamma_{s,a}(x) = \frac{s^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-sx}, \quad x \geq 0$$

auf  $[0, \infty)$  die Gamma-Verteilung mit Skalenparameter  $s$  und Formparameter  $a$ . ( $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$  ist die Eulersche Gamma-Funktion.)

a) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der  $\Gamma_{s,a}$ -Verteilung.

b) Sei  $X$  eine  $\Gamma_{s,a}$ ,  $Y$  eine davon unabhängige,  $\Gamma_{s,b}$ -verteilte Zufallsvariable ( $s, a, b > 0$ ),  $t > 0$ . Bestimmen Sie die Verteilung von  $tX$  und von  $X + Y$ .

**3. Aufgabe** In einer (hypothetisch unendlich großen) Population gebe es bezüglich einem gewissen diploiden Genort die drei genetischen Typen  $aa$ ,  $aA$  und  $AA$  mit Häufigkeiten  $p_{aa} = \vartheta^2$ ,  $p_{aA} = 2\vartheta(1 - \vartheta)$ ,  $p_{AA} = (1 - \vartheta)^2$ , wobei  $\vartheta \in [0, 1]$  („Hardy-Weinberg-Gleichgewicht“). In einer Stichprobe der Größe  $n$  aus der Population beobachten wir  $n_t$  Individuen von Typ  $t$ ,  $t \in \{aa, aA, AA\}$  (mit  $n_{aa} + n_{aA} + n_{AA} = n$ ). Formulieren Sie ein Modell und bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\vartheta$ .

**4. Aufgabe** Rosen und Jerdee (Influence of sex role stereotypes on personnel decisions, *J. Appl. Psych.* **59**, 9–14, 1974) berichten folgendes Experiment: 48 Teilnehmern eines Management-Kurses wurde je eine (fingierte) Personalakte vorgelegt, und sie sollten anhand der Aktenlage entscheiden, ob sie die betreffende Person befördern oder die Akte zunächst ablegen und weitere Kandidaten begutachten würden. Die Akten waren identisch bis auf die Geschlechtsangabe — 24 waren als „weiblich“ und 24 als „männlich“ gekennzeichnet — und wurden rein zufällig an die Teilnehmer verteilt. Es kam zu folgendem Ergebnis:

	Weiblich	Männlich
Befördern	14	21
Ablegen	10	3

Kann das Zufall sein? Stellen Sie sich dieser Frage beispielsweise mit einem Permutationstest: Wenn Beförderung und Geschlecht unabhängig wären, könnte man sich folgendes Ersatzexperiment vorstellen: Aus einer Urne mit 48 Akten, davon 24 „männlich“, werden 35 ohne Zurücklegen gezogen und mit „Befördern“ markiert, die restlichen mit „Ablegen“.

Hinweis: die R-Funktionen `[p|r]hyper` berechnen/simulieren die hypergeometrische Verteilung. (Alternativ: Schauen Sie sich die Online-Hilfe zu `fisher.test` an.)