Übungen zur Angewandten Stochastik

Blatt 3

---

1. Aufgabe (Aus G. Casella, R.L. Berger, *Statistical Inference*) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig, exponentialverteilt mit Parameter $\vartheta > 0$, d.h. $\rho(x, \vartheta) = \vartheta e^{-\vartheta x}$, $x \geq 0$.

a) Finden Sie einen unverzerrten Schätzer für den Erwartungswert $\tau(\vartheta)$ von X_1 unter P_ϑ, der nur die Statistik $\min\{X_1, \dots, X_n\}$ benutzt.

b) Finden Sie den besten Schätzer für $\tau(\vartheta)$, vergleichen Sie seine Varianz mit der des Schätzers aus a).

c) Für Lebensdauerverteilungen technischer Geräte nimmt man gelegentlich Exponentialverteilungen an. Die folgenden Beobachtungen sind die Ausfallzeiten (in h) einer Space-Shuttle-Komponente unter Stressbedingungen:

$$50.1, 70.1, 137.0, 166.9, 170.5, 152.8, 80.5, 123.5, 112.6, 148.5, 160.0, 125.4$$

Was ergeben Ihre Schätzer aus a) und b) für die mittlere Zeit bis zum Ausfall für diesen Datensatz?

2. Aufgabe Betrachten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_{ML} für ϑ anhand von n unabhängigen, uniform auf $[0, \vartheta]$ verteilten Beobachtungen. Wogegen konvergiert $n(\vartheta - T_{\mathrm{ML}})$ in Verteilung?

3. Aufgabe (Existenz der regulären bedingten Verteilung für polnische Wertebereiche) Seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ messbare Räume. Eine Abbildung $\kappa : \Omega_1 \times \mathscr{F}_2 \to [0, 1]$ heißt ein stochastischer Kern (von Ω_1 nach Ω_2), wenn gilt

(1) Für jedes $B \in \mathscr{F}_2$ ist die Abbildung $\Omega_1 \ni \omega_1 \mapsto \kappa(\omega_1, B) \in [0, 1]$ messbar, und

(2) für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$ ist $\kappa(\omega_1, \cdot)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$.

(Zusammen mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ kann man κ als ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß auffassen.)

Sei (S, d) ein separabler, vollständiger metrischer Raum (d.h. d ist eine Metrik auf S, S enthält eine abzählbare dichte Teilmenge, jede (d-)Cauchyfolge hat einen Grenzwert in S), $\mathscr{B}_S$ die Borel-σ-Algebra auf S (d.h. die kleinste σ-Algebra, die die offenen Teilmengen von S enthält). (Ein topologischer Raum, der auf diese Weise metrisiert werden kann, heisst häufig ein *polnischer Raum.*) Ziel dieser Aufgabe ist es, folgenden Satz zu beweisen:

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, darauf Y eine Zufallsvariable mit Werten in S, $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ eine Unter-σ-Algebra. Dann existiert eine reguläre Version der bedingten Verteilung von Y gegeben $\mathscr{F}$, d.h. ein stochastischer Kern $\kappa_{Y|\mathscr{F}}$ von $(\Omega, \mathscr{F})$ nach $(S, \mathscr{B}_S)$ so dass für alle $B \in \mathscr{B}_S$ gilt

$$\kappa_{Y|\mathscr{F}}(\cdot, B) = \mathbb{E}[1_B(Y)|\mathscr{F}] \quad \mathbb{P} - \text{f.s.}$$

a) Wie würden Sie κ für $|S| < \infty$ definieren?

b) Zeigen Sie die Aussage zunächst für $S = \mathbb{R}$, gehen Sie beispielsweise folgendermaßen vor: Definieren Sie für $r \in \mathbb{Q}$ Zufallsvariablen $F(r)$ mit $F(r) = \mathbb{E}[1_{(-\infty, r]}(Y)|\mathscr{F}]$ für ω außerhalb einer $\mathbb{P}$-Nullmenge, die nicht von $r \in \mathbb{Q}$ abhängt. Sei $\tilde{F}$ die rechtsstetige Fortsetzung von F als Funktion auf $\mathbb{R}$ (und auf obiger Nullmenge eine beliebige Verteilungsfunktion). Zeigen Sie, dass $\tilde{F}$ für jedes ω eine Verteilungsfunktion ist, die somit ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\kappa_{Y|\mathscr{F}}(\omega, \cdot)$ auf $\mathbb{R}$ bestimmt. $\kappa_{Y|\mathscr{F}}$ hat die gewünschten Eigenschaften. (Um die erforderlichen Messbarkeitseigenschaften nachzuweisen, ist es hilfreich, sich auf die Menge der Halbintervalle $(-\infty, r]$, $r \in \mathbb{Q}$ zurückzuziehen, die eine schnittstabile Erzeugermenge von $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ bilden.)

c) Es gebe $B \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$ (das wir mit der Spur-σ-Algebra von $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ ausstatten) und eine bijektive Abbildung $\varphi : S \to B$, φ und die Umkehrabbildung φ^{-1} seien beide messbar. (Solche Räume heißen häufig *Borel-* oder *Standard-Borel-Räume.*) Folgern Sie aus b), dass es in diesem Fall eine reguläre Version der bedingten Verteilung gibt.

d) S sei eine messbare Teilmenge von $[0,1]^\infty$ (wobei $[0,1]^\infty$ die Produkttopologie und die zugehörige Borel-σ-Algebra trägt). Zeigen Sie, dass S dann die Voraussetzungen für c) erfüllt, beispielsweise folgendermaßen: Konstruieren Sie eine bijektive, bi-messbare Abbildung $\psi : [0,1]^\infty \to [0,1]$. Für $x = (x_1, x_2, \dots) \in [0,1]^\infty$ sei $x_i = \sum_{j=1}^\infty 2^{-j} x_{ij}$ mit $x_{ij} \in \{0,1\}$ die Binärdarstellung der Koordinaten (eindeutig durch die Forderung, dass für jedes i gelten soll $x_{ij} = 0$ für unendlich viele j, sofern das möglich ist). Sei $(a(n), b(n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathbb{N}$, definieren Sie

$$\psi(x) := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} x_{a(n),b(n)}.$$

(Beweisen Sie, dass die Abbildung, die einer Zahl aus $[0,1]$ die i-te Ziffer der Binärentwicklung zuordnet, messbar ist: Sie hat nur endlich viele Sprünge.)

e) Zeigen Sie, dass $(S, \mathscr{B}_S)$ unter obigen Voraussetzungen die Eigenschaften aus c) besitzt. Gehen Sie beispielsweise folgendermassen vor:
Wegen d) genügt es, eine bijektive und bi-messbare Abbildung von S auf $\tilde{S} \subset [0,1]^\infty$ zu konstruieren, wobei $\tilde{S}$ messbar ist. Sei $(x_m) \subset S$ dicht, definieren Sie für $x \in S$

$$\varphi(x) := \big(d(x,x_1) \wedge 1, d(x,x_2) \wedge 1, \dots\big) \in [0,1]^\infty.$$

Zeigen Sie, dass

$$y_n \underset{n\to\infty}{\to} y \text{ in } S \quad \iff \quad \forall\, m \in \mathbb{N}: \; d(y_n, x_m) \wedge 1 \underset{n\to\infty}{\to} d(y, x_m) \wedge 1$$

gilt und folgern Sie, dass φ stetig und injektiv ist, und dass $\varphi^{-1} : \varphi(S) \to S$ stetig ist. Um zu beweisen, dass $\tilde{S} := \varphi(S)$ messbar ist, betrachten Sie

$$U_n := \big\{x \in \overline{\varphi(S)} : \exists\, V \subset [0,1]^\infty \text{ offen}, x \in V \text{ mit } \operatorname{diam}(\varphi^{-1}(U \cap \varphi(S))) \le 1/n\big\}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{S} \subset U_n$, U_n relativ offen in $\overline{\varphi(S)}$, und $\tilde{S} = \cap_{n=1}^\infty U_n$. (Damit haben Sie gezeigt, dass $\tilde{S}$ eine G_δ-Menge in $[0,1]^\infty$ ist, also als abzählbarer Durchschnitt von offenen Mengen dargestellt werden kann. Insbesondere ist $\tilde{S}$ Borel-messbar, und die Messbarkeit von φ und φ^{-1} folgt aus ihrer Stetigkeit.)

Literaturhinweise: Für b) und c) beispielsweise A. Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Kap. 8, für d) L. Breiman, *Probability*, Anhang 7, für e) L.C.G. Rogers, D. Williams, *Diffusions, Markov processes and martingales*, Bd. 1, Abschn. 82.