Übungen zur Angewandten Stochastik

Blatt 4

1. Aufgabe Sei $(\mathcal{X}, \mathscr{F}, P_\vartheta : \vartheta \in \Theta)$ ein reguläres (einparametriges) statistisches Modell mit $|\mathcal{X}| < \infty$, die Likelihood-Funktion $\rho(x, \theta)$ sei für jedes x dreimal differenzierbar bezüglich ϑ. Zeigen Sie: Für $\vartheta \in \Theta$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{\varepsilon^2} H(P_{\vartheta+\varepsilon} | P_\vartheta) = I(\vartheta)$$

(Hinweis: Taylor-Entwicklung für $\log(\rho_{\vartheta+\varepsilon}(x)/\rho_\vartheta(x))$.)

2. Aufgabe **a)** Betrachten Sie das Binomialmodell mit Likelihoodfunktion $\rho(x, \vartheta) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x}$, $x \in \{0, \dots, n\}$, $\vartheta \in (0, 1)$ (n fest) im Bayes'schen Kontext mit A-priori-Dichte

$$\alpha(\vartheta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \vartheta^{a-1}(1-\vartheta)^{b-1},$$

wo $a, b > 0$. Bestimmen Sie die A-posteriori-Dichte und den Bayes-Schätzer.

b) Betrachten Sie speziell den Bayes-Schätzer aus a) zur uniformen Vorbewertung ($a = b = 1$). Ist dieser Schätzer erwartungstreu? Für welche $\vartheta \in (0, 1)$ ist sein erwarteter quadratischer Fehler kleiner als der des besten (erwartungstreuen) Schätzers $T_n(x) = x/n$?

3. Aufgabe Zeigen Sie: In einer exponentiellen Familie P_ϑ bezüglich der Statistik T ist T vollständig, d.h.

$$\big(\forall \vartheta : \mathbb{E}_\vartheta[g(T)] = 0\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(\forall \vartheta : g \equiv 0 \ P_\vartheta - \text{f.s.}\big)$$

(Hinweis: Nutzen Sie beispielsweise aus, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dessen Laplace-Transformierte in einer Umgebung der Null existiert, durch die Werte der Laplace-Transformierten in dieser Umgebung eindeutig bestimmt ist.)

4. Aufgabe Die Datei `Lottozahlen.txt` enthält für jede der Zahlen 1 bis 49 die absolute Häufigkeit, mit der diese Zahl in 4644 Ziehungen von 1955 bis 2008 des Lottos 6 aus 49 vorkam (ohne Zusatzahl, siehe z.B. `http://www.dielottozahlen.de`). Bestimmen Sie für jede der Zahlen ein Konfidenzintervall zum Irrtumsniveau $\alpha = 0{,}05$ für die Wahrscheinlichkeit, diese Zahl in einer Ziehung zu sehen. Wieviele dieser Konfidenzintervalle überdecken den theoretischen Wert? Ist das Ergebnis überraschend? – führen Sie beispielsweise mit `R` eine kleine Simulationsstudie durch.