Dr. M. Birkner SS 2008

Übungen zur Angewandten Stochastik

Blatt 6

---

1. Aufgabe Jemand behauptet, mittels übernatürlicher Fähigkeiten die Farbe der (verdeckten) obersten Karte eines gut durchmischten Skatblatts auf lange Sicht in mindestens 1/3 aller Fälle richtig vorhersagen zu können. Nehmen wir an, Sie bezweifeln das und verdächtigen, dass die Person einfach rät. Vereinbaren Sie für $\alpha = 0.05, 0.01, 0.001$ jeweils einen Test, so dass eine Fehlentscheidung sowohl in der von Ihnen unterstellten als auch in der vom Gegenüber behaupteten Situation höchstens mit Wahrscheinlichkeit α gefällt wird.

2. Aufgabe (p-Werte und Kombination unabhängiger Tests) Eine relle Statistik $T = T(X)$ habe für alle $\vartheta \in \Theta_0$ dieselbe stetige, strikt montone Verteilungsfunktion $F(c) = P_\vartheta(T \le c)$, $c \in \mathbb{R}$, d.h. für jedes $c \in \mathbb{R}$ definiert $\{T < c\}$ den Ablehnungsbereich eines Tests von Θ_0 gegen $\Theta \setminus \Theta_0$ zum Niveau $\alpha = F(c)$. Der p-Wert zur Beobachtung X ist $F(T(X))$, d.h. das größte Niveau, zu dem wir die Nullhypothese $\vartheta \in \Theta_0$ ablehnen könnten (oder anders gewendet, die Wahrscheinlichkeit, unter P_ϑ mit $\vartheta \in \Theta_0$ einen Wert von T kleiner oder gleich dem tatsächlich beobachteten zu erhalten).
Seien $p_1, \dots, p_n$ die p-Werte basierend $T_1, \dots, T_n$, wobei die T_i durch n-malige unabhängige Wiederholung desselben Experiments gewonnen wurden. Zeigen Sie: Unter der Nullhypothese ist

$$S := -2 \sum_{i=1}^{n} \log p_i$$

χ^2_{2n}-verteilt, und somit ist $\{S > q\}$ für $q = (1-\alpha)$-Quantil von χ^2_{2n} der Ablehnungsbereich eines Tests von Θ_0 gegen $\Theta \setminus \Theta_0$ zum Niveau α. (Hinweis: Überlegen Sie, wie die p_i unter der Nullhypothese verteilt sind.)

3. Aufgabe John Arbuthnott berichtete und diskutierte in seinem Artikel „An Argument for Divine Providence, taken from the Constant Regularity observed in the Births of both Sexes“, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **27**, 186–190 (1710), die Anzahl männlicher und weiblicher geborener (genaugenommen: getaufter) Kinder in London in den Jahren 1629–1710 (siehe auch `arbuthnot.dat`):

Jahr	Männl.	Weibl.	Jahr	Männl.	Weibl.	Jahr	Männl.	Weibl.	Jahr	Männl.	Weibl.
1629	5218	4683	1650	2890	2722	1671	6449	6061	1692	7602	7316
1630	4858	4457	1651	3231	2840	1672	6443	6120	1693	7676	7483
1631	4422	4102	1652	3220	2908	1673	6073	5822	1694	6985	6647
1632	4994	4590	1653	3196	2959	1674	6113	5738	1695	7263	6713
1633	5158	4839	1654	3441	3179	1675	6058	5717	1696	7632	7229
1634	5035	4820	1655	3655	3349	1676	6552	5847	1697	8062	7767
1635	5106	4928	1656	3668	3382	1677	6423	6203	1698	8426	7626
1636	4917	4605	1657	3396	3289	1678	6568	6033	1699	7911	7452
1637	4703	4457	1658	3157	3013	1679	6247	6041	1700	7578	7061
1638	5359	4952	1659	3209	2781	1680	6548	6299	1701	8102	7514
1639	5366	4784	1660	3724	3247	1681	6822	6533	1702	8031	7656
1640	5518	5332	1661	4748	4107	1682	6909	6744	1703	7765	7683
1641	5470	5200	1662	5216	4803	1683	7577	7158	1704	6113	5738
1642	5460	4910	1663	5411	4881	1684	7575	7127	1705	8366	7779
1643	4793	4617	1664	6041	5681	1685	7484	7246	1706	7952	7417
1644	4107	3997	1665	5114	4858	1686	7575	7119	1707	8379	7687
1645	4047	3919	1666	4678	4319	1687	7737	7214	1708	8239	7623
1646	3768	3395	1667	5616	5322	1688	7487	7101	1709	7840	7380
1647	3796	3536	1668	6073	5560	1689	7604	7167	1710	7640	7288
1648	3363	3181	1669	6506	5829	1690	7909	7302			
1649	3079	2746	1670	6278	5719	1691	7662	7392			

Formulieren Sie ein Modell und finden Sie Konfidenzintervalle, sagen wir zum Niveau 0.01, für die Wahrscheinlichkeit ϑ einer Knabengeburt für den gesamten Beobachtungszeitraum und für jedes der Jahre einzeln und testen Sie die Hypothese $\vartheta = 0.5$. Wie können Sie vorgehen, um die Hypothese zu testen, dass die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt über die Jahre konstant ist? Unterstützt Ihr Testergebnis Arbuthnotts Argument für die göttliche Vorsehung?