Übungen zur Angewandten Stochastik

Blatt 11

1. Aufgabe Ein sog. Diskountzertifikat auf eine Aktie S^1 mit Fälligkeit T und „Cap“ $K > 0$ zahlt dem dem Inhaber zum Fälligkeitstermin $\min\{S^1_T, K\}$ aus. Nehmen wir an, die Kursentwicklung der Aktie S^1 wird durch ein Binomialmodell mit $T = 100$ Perioden bestimmt, in dem der Kurs in jeder Periode entweder mit $(1 + a)$ oder $(1 + b)$ multipliziert wird, wo $a = -0.1$, $b = 0.12$, und in dem es eine weitere festverzinsliche Anleihe S^0 gibt, die in jeder Periode mit $r = 0.03$ verzinst wird.
a) Bestimmen Sie (numerisch) den fairen Preis für ein Diskountzertifikat mit Cap $K \in \{105\text{€}, 110\text{€}, 120\text{€}\}$, wenn S^1_0 =100€.
b) Bestimmen Sie in demselben Szenario den fairen Preis für eine europäische Call-Option mit Ausübungspreis $K \in \{105\text{€}, 110\text{€}, 120\text{€}\}$. Was fällt Ihnen auf?

2. Aufgabe (Nutzenmaximierung , Markträumung und Gleichgewichtspreise) Betrachten wir ein Marktmodell, in dem es d risikobehaftete Güter $S^1, \dots, S^d$ gibt, deren Werte zur Zeit $t = 1$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ mit $|\Omega| < \infty$ und $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für $\omega \in \Omega$ sind, sowie eine (der Einfachheit halber unverzinste) risikolose Anlage $S^0 \equiv 1$.
Es gebe A Agenten auf diesem Markt, Agent a besitze die Anfangsausstattung $(\alpha_{ai})_{i=0,\dots,d}$, d.h. zur Zeit 0 besitzt er α_{ai} Einheiten von Gut i, und die *Nutzenfunktion* $U_a(w) = 1 - e^{-u_a w}$ mit einem $u_a > 0$.
Bei gegebenen Preisen $\overline{\pi} = (1, \pi_1, \dots, \pi_d)$ von $\overline{S} = (S^0, S^1, \dots, S^d)$ zur Zeit $t = 0$ möchte Agent a u.U. gerne seine Anfangsausstattung tauschen gegen ein (α'_{ai}), das seine Budgetbedingung

$$\sum_{i=0}^{d} \alpha'_{ai}\pi_i \le \sum_{i=0}^{d} \alpha_{ai}\pi_i$$

erfüllt, so dass $\mathbb{E}\big[U_a\big(\sum_{i=0}^d \alpha'_{ai}S^i\big)\big]$, sein erwarteter Nutzen zur Zeit $t = 1$, maximal ist unter allen $(\alpha'_{ai})_{i=0,\dots,d}$, die seine Budgetbedingung erfüllen. Wie muss „der Markt“ die Preise $\overline{\pi}$ wählen, so dass einerseits sämtliche Agenten ihren erwarteten Nutzen bei diesem $\overline{\pi}$ maximieren können und zugleich die *Markträumungsbedingung*

$$\sum_{a=1}^{A} \alpha^*_{ai} = \sum_{a=1}^{A} \alpha_{ai} =: \overline{\alpha}_i, \quad i = 0, 1, \dots, d$$

gilt, d.h., alle Güter sind über die Agenten verteilt (dabei sei $(\alpha^*_{ai})_{i=0,\dots,d}$ die optimale Ausstattung von Agent a)?
Sei $u := \big(\sum_{a=1}^A 1/u_a\big)^{-1}$, $W := \sum_{i=0}^d \overline{\alpha}_i S^i$ (das *Marktportfolio*), $\varphi^*(\omega) := \exp(-uW)/\mathbb{E}[\exp(-uW)]$. Zeigen Sie: Die Lösung obiger Aufgabe ist $\overline{\pi}^*$ mit $\pi^*_i := \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[S^i]$, wo $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) := \varphi^*(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$, und die optimale Verteilung der Güter ist gegeben durch

$$\alpha^*_{ai} = \frac{u}{u_a}\overline{\alpha}_i, \;\; i = 1, \dots, d, \quad \alpha^*_{a0} = \alpha_{a0} + \sum_{i=1}^{d} \big(\alpha_{ai}\pi^*_i - \frac{u}{u_a}\overline{\alpha}_i\big), \qquad a = 1, \dots, A.$$

3. Aufgabe (Lévys Konstruktion der Brownschen Bewegung) Seien Z_{nk}, $n, k \in \mathbb{Z}_+$ u.a., $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Prozessen $\tilde{B}_n(t)$, wo $\tilde{B}_n(t)$ für $t \in \mathcal{D}_n := \{k2^{-n}, k = 0, 1, \dots, 2^n\}$ definiert ist, folgendermaßen: $\tilde{B}_0(0) = 0$, $\tilde{B}_0(1) = Z_{00}$. Wenn $\tilde{B}_n$ definiert ist, setze

$$\tilde{B}_{n+1}\Big(\frac{k}{2^{n+1}}\Big) = \begin{cases} \tilde{B}_n\big(\frac{k}{2^{n+1}}\big) := \tilde{B}_n\big(\frac{m}{2^n}\big) & \text{falls } k = 2m \\ \frac{1}{2}\Big(\tilde{B}_n\big(\frac{m}{2^n}\big) + \tilde{B}_n\big(\frac{m+1}{2^n}\big)\Big) + 2^{-(n+2)/2} Z_{n+1,m} & \text{falls } k = 2m+1 \end{cases}$$

(betrachten Sie eine Skizze). Sei $B_n(t)$ die Fortsetzung von $\tilde{B}_n$ als stetige Funktion auf $[0,1]$ durch stückweise lineare Interpolation in $[0,1] \setminus \mathcal{D}_n$.
Zeigen Sie: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\ge n} \sup_{t\in[0,1]} |B_m(t) - B_n(t)| = 0$$

fast sicher, d.h. die Folge zufälliger Funktionen B_n konvergiert fast sicher gegen eine stetige Grenzfunktion $B(t)$, $t \in [0,1]$. Für $0 \le t < t' < t''$ sind die Zuwächse $B(t'') - B(t')$ und $B(t') - B(t)$ unabhängig, und $B(t') - B(t)$ ist $\mathcal{N}(0, t' - t)$-verteilt. Bestimmen Sie $\mathrm{Cov}(B(t), B(t'))$.
(Hinweis: Eine sehr schöne Erläuterung dieses Sachverhalts finden Sie in dem Buchmanuskript *Brownian Motion* von P. Mörters und Y. Peres, erhältlich über P. Mörters' Homepage `http://people.bath.ac.uk/maspm/`)