Dr. Cynthia Hog-Angeloni Dr. D. Festi

12. Übung zur Vorlesung

Topologie

im Wintersemester 18/19

Aufgabe 1: (10 Punkte)

Sei K ein Körper und Vec_K die Kategorie der Vektorräume über K. Zeigen Sie, dass Dualisieren (also die Vorschrift, die V auf $V^* := Hom_K(V, K)$ und den Homomorphismus $\varphi\colon V \to W$ auf $\varphi^* : W^* \to V^*, \psi \mapsto \psi \circ \varphi$ schickt) ein kontravarianter Funktor $F : Vec_K \longrightarrow Vec_K$ ist.

Aufgabe 2: (5+25 Punkte)

Wir betrachten die Folge von Abbildungen

$$C\colon 0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0 \longrightarrow 0$$

mit $C_2 = C_0 = \mathbb{Z}^2, C_1 = \mathbb{Z}^3$ und den Abbildungen ∂_i gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix D_i, $i = 1, 2$, wobei $D_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 18 & 12 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$ und $D_0 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

(a) Zeigen Sie, dass (C, ∂) ein Kettenkomplex ist.

(b) Berechnen Sie die Homologiegruppen $H_i(C)$ des Kettenkomplexes (C, ∂).

Aufgabe 3: (5+25 Punkte)

Betrachten Sie den Kettenkomplex

$$M\colon 0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\varphi} M_1 \xrightarrow{\psi} M_0 \longrightarrow 0$$

mit

$$\begin{aligned} M_2 &:= \mathbb{Z}[123] \oplus \mathbb{Z}[134] \oplus \mathbb{Z}[124] \oplus \mathbb{Z}[234] \cong \mathbb{Z}^4 \\ M_1 &:= \mathbb{Z}[12] \oplus \mathbb{Z}[23] \oplus \mathbb{Z}[34] \oplus \mathbb{Z}[14] \oplus \mathbb{Z}[13] \oplus \mathbb{Z}[24] \cong \mathbb{Z}^6 \\ M_0 &:= \mathbb{Z}[1] \oplus \mathbb{Z}[2] \oplus \mathbb{Z}[3] \oplus \mathbb{Z}[4] \cong \mathbb{Z}^4 \end{aligned}$$

und den Homomorphismen φ induziert durch $[ijk] \mapsto [ij] + [jk] - [ik]$ und ψ induziert durch $[lm] \mapsto [l] - [m]$.

(a) Von welcher geometrischen Situation wurden obige Abbildungen abgeleitet?

(b) Bestimmen Sie die Homologie $H_i(M)$.

Aufgabe 4: (15+15 Punkte)

Es seien (M, ∂^M) und (N, ∂^N) Kettenkomplexe. Wir setzen

$$P_n := \bigoplus_{k+\ell=n} M_k \otimes N_\ell$$

und definieren eine Abbildung $\partial_n \colon P_n \to P_{n-1}$ durch

$$\partial_n(a \otimes b) := \partial_k^M(a) \otimes b + (-1)^k a \otimes \partial_\ell^N(b)$$

für $a \in M_k$ und $b \in N_\ell$.

(a) Rechnen Sie nach, dass (P, ∂) ein Kettenkomplex ist. Diesen nennt man das *Tensorprodukt* der Kettenkomplexe M und N und schreibt $P = M \bigotimes N, \partial = \partial^M \otimes \partial^N$.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : M \bigotimes N \to N \bigotimes M$ gegeben durch $T(a \otimes b) = (-1)^{kl} b \otimes a$ für $a \in M_k$ und $b \in N_\ell$ ein Isomorphismus von Kettenkomplexen ist.

Abgabe am Montag, den 4.2. um 8:00 Uhr morgens.