**R. Höpfner: Schätzer und Tests, Sommersemester 2012**

**Übungsblatt 1**

Abgabe per mail an `hoepfner@uni-mainz.de` bis **MI 08.05.12**

Besprechung voraussichtlich FR 11.05.12

Aufgabe 1.1 (symmetrisch stabile Verteilungen): Symmetrisch stabile Verteilungen existieren zu jedem Stabilitätsindex $\alpha \in (0,2]$ und besitzen charakteristische Funktionen der Form

$$(1) \qquad E\left(e^{i\,t\,X}\right) \;=\; \int e^{i\,t\,x}\,F(dx) \;=\; e^{-\,c\,|t|^\alpha} \quad , \quad t \in I\!R$$

mit Skalierungskonstanten $c > 0$ (insbesondere ist die Cauchyverteilung symmetrisch stabil zum Index $\alpha = 1$ und die zentrierte Normalverteilung symmetrisch stabil zum Index $\alpha = 2$). Dabei heisst eine Familie von iid ZV $X_1, X_2, \ldots$ symmetrisch stabil mit Index $\alpha$ falls

$$\text{für jedes } n \geq 1 \text{ gilt} \quad \mathcal{L}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^{1/\alpha}}\right) \;=\; \mathcal{L}\left(X_1\right) \ .$$

Nach Chambers, Mallows and Stuck (JASA 1976) simuliert man eine nach (1) mit $c = 1$ verteilte Zufallsvariable $X$ als

$$(2) \qquad \frac{\sin(\alpha\Phi)}{(\cos\Phi)^{1/\alpha}} \cdot \left(\frac{\cos((1-\alpha)\Phi)}{\Psi}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \qquad \text{im Fall } \alpha \neq 1$$

aus einem Paar unabhängiger ZV $(\Phi, \Psi)$ mit der Eigenschaft

$$(3) \qquad \Psi \text{ ist standard-exponentialverteilt, } \Phi \text{ ist gleichverteilt auf } (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \ .$$

Davon überzeuge man sich auf folgende Weise:

a) Für $\alpha = 0.15$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.8$ und $\alpha = 1.6$ simuliere man $N = 10000$ iid ZV nach (2), plotte die empirische charakteristische Funktion

$$t \longrightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \cos(tX_i) \quad (\text{beachte } E_\alpha(e^{i\,t\,X_1}) = E_\alpha(\cos(tX_1)) \text{ wegen Symmetrie von } \mathcal{L}_\alpha(X_1))$$

zu diesen Beobachtungen, und vergleiche mit (1) für $c = 1$.

b) Für dieselben Werte von $\alpha$ ziehe man in $N = 1000$ Simulationsläufen je $n = 1000$ iid ZV $X$ nach (1), berechne $Y := \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{n} X_j$, betrachte ein Histogramm dieser $N$ $Y$-Werte, und vergleiche dies mit einem Histogramm aus zusätzlich gezogenen $N$ $X$-Werten.

(Abgabe: Graphiken, Programm)

Aufgabe 1.2 (ein einfacher Minimum-Distanz-Schätzer): Die Laplace-Transformierte (LT)

$$\kappa(\lambda): \quad t \longrightarrow E_\lambda\left(e^{-tX_1}\right)$$

der Exponentialverteilung $\mathcal{E}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$ existiert auf $[0, \infty)$ und ist gegeben durch

$$[0,\infty) \ni t \longrightarrow \kappa(\lambda)(t) := \left(\frac{\lambda}{\lambda + t}\right) \in (0,1]\ . \tag{4}$$

Die empirische LT basierend auf iid Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ iid $\sim \mathcal{E}(\lambda)$ ist

$$\widehat{\kappa}_n: \quad [0,\infty) \ni t \longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-t\,X_1} \in (0,1]\ . \tag{5}$$

Für geeignete Kompakta $[0,T]$ und geeignete auf $[0,T]$ konzentrierte endliche Masse $\mu$ setze man $H := L^2([0,T],\mu)$, betrachte die Funktionen $\kappa(\lambda)$, $\lambda > 0$, $\widehat{\kappa}_n$, $n \geq 1$ als Elemente des Hilbertraums $H$, und schätze den unbekannten Parameter $\lambda > 0$ aufgrund der gemachten Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ durch

$$\widehat{\lambda}_n \ \text{Minimalstelle der Abbildung} \quad \lambda \longrightarrow \|\widehat{\kappa}_n - \kappa(\lambda)\|_H\ . \tag{6}$$

a) Wähle $T = 5$ und plotte eine Schar von Funktionen $\kappa(\lambda)$ auf $[0,T]$ (eine Graphik, mit einer geeignet gewählten Familie von $\lambda$-Werten).
b) Für $\lambda_0 := 0.643$ und $n = 117$ ziehe man iid ZV $X_1, \ldots, X_n$ iid $\sim \mathcal{E}(\lambda_0)$, bilde die empirische LT (5), und zeichne diese in das Tableau aus a) ein.
c) Mit der empirischen LT aus b) plotte man die Funktion

$$\lambda \longrightarrow \|\widehat{\kappa}_n - \kappa(\lambda)\|_H$$

aus (6) über einem geeigneten Intervall von $\lambda$-Werten und ermittle graphisch eine Minimalstelle $\widehat{\lambda}_n$. Man verwende dabei verschiedene Masse $\mu$ auf $[0,T]$, insbesondere solche, die Umgebungen von $0^+$ im Vergleich zu anderen Stellen in $[0,T]$ mit höherem Gewicht belegen (warum sollte das Mass $\mu$ bevorzugt an die Stelle $0^+$ schauen?).
(Abgabe: Graphiken, Programm)

Zusatz (nicht abzugeben): Welche Möglichkeiten sehen Sie, die Varianz von Minimum-Distanz-Schätzern nach (6) als Funktion des Parameters $\lambda$ zu bestimmen, bzw. diese durch 'geeignete' Wahl eines Masses $\mu$ auf einem geeigneten $\lambda$-Intervall in vernünftiger Weise klein zu halten? Die Grenzverteilungen von Minimum-Distanz-Schätzern nach (6) sind zwar explizit bekannt (siehe

Theorem 2.23 im Online-Skript 'Asymptotische Statistik'), aber Ausrechnen der Varianz nach dieser Formel ist vermutlich nicht der bequemste Weg ...

Aufgabe 1.3: Man legt Ihnen den folgenden Datensatz auf den Tisch

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1.1410640891 | 1.2559212310 | 1.7091496592 | 0.5791973571 | 0.2350347566 |
| 0.2797354238 | 0.0835205310 | 1.1497028098 | 1.6077323918 | 0.8691289156 |
| 0.2975460053 | 0.1229902146 | 0.4172616919 | 1.0820273828 | 0.6185261721 |
| 0.0587241488 | 0.0306683251 | 0.1879248143 | 0.9258516930 | 0.7601731704 |
| 1.0013452960 | 0.4099094245 | 0.9833031763 | 0.5648066155 | 0.8742712731 |
| 1.0682496939 | 0.2342384149 | 1.2652041352 | 0.0271478180 | 0.0510763275 |
| 0.2498786364 | 0.3913555323 | 0.9585606049 | 1.7270911803 | 0.7146648342 |
| 0.0666528586 | 0.2451770579 | 2.4354740832 | 0.3013140305 | 0.5157648562 |
| 0.3676634537 | 0.2083851608 | 0.2653654185 | 2.8224802932 | 0.4735276058 |
| 0.2012072008 | 1.1979086031 | 0.1357195497 | 0.8904302237 | 0.3454855155 |
| 2.7100823856 | 0.5170517103 | 0.0557705792 | 0.1832603964 | 0.4347159039 |
| 0.7251092801 | 0.4508100262 | 0.0186552066 | 0.3026104625 | 0.4651722613 |
| 0.5632647058 | 0.6903335809 | 0.9993758649 | 3.0855387167 | 0.7227570080 |
| 0.3589278033 | 0.0765612000 | 0.7773538943 | 0.6006757129 | 0.4373124590 |
| 0.8409083739 | 0.1219266178 | 0.0935296307 | 1.5909156979 | 1.5226498811 |
| 0.9043596768 | 0.4571208089 | 0.1851323845 | 1.3467421755 | 0.6719887818 |
| 0.4104998578 | 1.9006858873 | 0.9281802718 | 0.0541537790 | 0.3712284950 |
| 0.3690936434 | 0.1254227464 | 0.5987409923 | 0.1315650561 | 0.3457894025 |
| 0.1164121585 | 1.2771764272 | 1.1435623516 | 0.1471229599 | 2.2297406951 |
| 0.3517080239 | 0.0075890638 | 0.1670633350 | 1.2889276169 | 0.1613457024 |
| 0.6031800357 | 1.8473422345 | 0.8048775842 | 0.0005469626 | 0.3179824175 |
| 0.3239016738 | 1.9120465657 | 0.3077701541 | 0.7779872968 | 1.2986388503 |
| 0.2596163644 | 2.3730390232 | 0.1840455486 | 1.0670601096 | 1.1644639827 |
| 0.4506231078 | 0.0752116703 | 0.1822424552 | 0.0375124535 | 0.8625324956 |
| 2.0103077110 | 0.4287275294 | 0.6951164363 | 0.1497795853 | 0.2240365814 |
| 0.1460687458 | 1.0281269655 | 0.1141387834 | 0.3854087629 | 0.1287396701 |
| 0.0611926581 | 0.8346027094 | 1.0433865511 | 0.5442047671 | |

und versichert Ihnen, es handle sich um exponentialverteilte iid Daten. Schätzen Sie den unbekann-

ten Parameter der zugrundeliegenden Exponentialverteilung mit einem Minimum-Distanz-Verfahren!
(Abgabe: Graphiken, Programm)