R. Höpfner: Schätzer und Tests, Sommersemester 2012

Übungsblatt 5

Abgabe per mail an `hoepfner@uni-mainz.de` bis **MI 13.06.12**

Besprechung voraussichtlich FR 15.06.12

Aufgabe 5.1 (Gütefunktionen von Tests): Man betrachte den χ^2-Varianztest im Normalverteilungsmodell für vorgegebene $\sigma_0^2 = 1.25$ und $\alpha = 0.1$, sowohl für kleine (etwa $n = 3, n = 5$) als auch für 'mittlere' (etwa $n = 27, n = 31$) oder grosse Werte (etwa $n = 123$) von n.

a) Für einseitige Hypothesen **H**: $\sigma^2 \le \sigma_0^2$ gegen **K**: $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$ zeichne man die Gütefunktion des einseitigen Tests zum Niveau α

$$(\mu, \sigma^2) \longrightarrow P^n_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)}{\sigma_0^2} \widetilde{S_n^2} > \chi^2_{n-1,1-\alpha} \right)$$

als Fläche über geeigneten (μ, σ^2)-Rechtecken, und überzeuge sich 'graphisch', dass der Test unverfälscht ist.

b) Für zweiseitige Hypothesen **H**: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ gegen **K**: $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$ zeichne man die Gütefunktion eines zweiseitigen Tests zum Niveau α wie in 1.18 B) der Vorlesung

$$(\mu, \sigma^2) \longrightarrow P^n_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)}{\sigma_0^2} \widetilde{S_n^2} \notin \left[\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \, , \, \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \right] \right)$$

als Fläche über geeigneten (μ, σ^2)-Rechtecken, wobei man besonders genau auf das Verhalten der Gütefunktion für σ^2 in kleinen Umgebungen von σ_0^2 achte.

c) Kann man abhängig von n und σ_0^2 Konstanten c_1, c_2 so festlegen, dass für einen zweiseitigen χ^2-Varianztest der modifizierten Form

$$\phi \;:=\; 1_{\left\{ \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} \widetilde{S_n^2} \notin \left[\chi^2_{n-1,c_1} , \chi^2_{n-1,1-c_2} \right] \right\}} \quad , \quad c_1, c_2 > 0 \; , \; c_1 + c_2 = \alpha$$

im Normalverteilungsmodell die Unverfälschtheit gilt?

(Abgabe: Programm, Graphiken)

Aufgabe 5.2 : Eine Untersuchung des Intelligenzquotienten in einer Gruppe fünfjähriger Kinder (per Definition ist der Mittelwert der Messgrösse IQ über 'die Gesamtheit aller Menschen' auf

100 normiert) ergab die folgenden Werte:

103	124	124	104	96	92	124	99	92	116	99	81	117	100	89	125
127	112	48	139	118	107	106	129	117	123	118	84	117	101	141	124
110	98	109	120	127	103	118	117	115	119	117	92	101	119	144	119
127	113	127	103	128	86	112	115	117	99	110	139	117	96	111	118
126	126	89	102	134	93	115	99	99	122	106	124	100	114	121	119
108	110	127	118	107	123	102	110	114	118	101	121	114			

Man nehme an, dass diese Daten als iid Beobachtungen aus einem Normalverteilungsmodell entstanden sind.

a) Man teste die Hypothese $\mathbb{H} : \mu = 100$ gegen die Alternative $\mathbb{K} : \mu \neq 100$ zum Niveau $\alpha = 0.1$ und interpretiere das Ergebnis.

a) Man teste die Hypothese $\mathbb{H} : \mu \leq 105$ gegen die Alternative $\mathbb{K} : \mu > 105$ zum Niveau $\alpha = 0.05$.

c) Ihr Flurnachbar studiert Psychologie und meint sich zu erinnern, die Standardabweichung in IQ-Daten sei mit $\sigma_0 = 10$ anzusetzen. Prüfen Sie dies anhand Ihres Datensatzes. Am nächsten Morgen meint er zu Ihnen, vielleicht sei es doch eher 15. Prüfen Sie auch das.

c) Ist es wirklich sinnvoll, für den gegebenen Datensatz ein Normalverteilungsmodell anzunehmen ?

(Abgabe: kurze Text/Formelzeilen)