R. Höpfner: Schätzer und Tests, Sommersemester 2012

Übungsblatt 6

Abgabe per mail an `hoepfner@uni-mainz.de` bis **MI 20.06.12**

Besprechung voraussichtlich FR 22.06.12

Aufgabe 6.1 (Gütefunktionen von Tests II): Man betrachte den t-Test im Normalverteilungsmodell für vorgegebene $\mu_0 = 0.5$ und $\alpha = 0.1$, für kleine (etwa $n = 3, n = 5$) und 'mittlere' (etwa $n = 27, n = 31$) Werte von n.

a) Für einseitige Hypothesen **H**: $\mu \le \mu_0$ gegen **K**: $\mu > \mu_0$ berechne und zeichne man die Gütefunktion des einseitigen Tests zum Niveau α, unter Ausnutzung von Satz 1.14 ii):

$$(\mu,\sigma^2) \quad \longrightarrow \quad P^n_{\mu,\sigma^2}\left(\overline{X}_n - \mu_0 \ > \ t_{n-1,1-\alpha}\,\frac{\sqrt{\widetilde{S}^2_n}}{\sqrt{n}} \right) \ = \ P^n_{0,1}\left(\overline{X}_n \ > \ \frac{\mu_0-\mu}{\sigma} + t_{n-1,1-\alpha}\,\frac{\sqrt{\widetilde{S}^2_n}}{\sqrt{n}} \right)$$

$$= \int_0^\infty P^n_{0,1}\left(\overline{X}_n \ > \ \frac{\mu_0-\mu}{\sigma} \ + \ t_{n-1,1-\alpha}\,\frac{\sqrt{\widetilde{y}}}{\sqrt{n}} \right) \mathcal{L}\left(\widetilde{S}^2_n \mid P^n_{0,1} \right)(d\widetilde{y})$$

als Fläche über geeigneten (μ,σ^2)-Rechtecken. Man überzeuge sich aus der Gestalt des Integranden im letzten Integral, dass der Test unverfälscht ist.

b) Für zweiseitige Hypothesen **H**: $\mu = \mu_0$ gegen **K**: $\mu \ne \mu_0$ berechne und zeichne man die Gütefunktion des zweiseitigen t-Tests zum Niveau α analog zu a) als Fläche über geeigneten (μ,σ^2)-Rechtecken. Durch Betrachten von μ-Werten nahe μ_0 mache man graphisch deutlich, dass der Test unverfälscht ist – warum muss dies hier so sein?

(Abgabe: Programm, Graphiken)

Aufgabe 6.2 (Gütefunktionen von Tests III): Im einseitigen t-Test ϕ im Normalverteilungsmodell für vorgegebene Schwelle $\mu_0 = 0.5$ und vorgegebenes Niveau $\alpha = 0.1$ möchte man mit einer kritischen Überschreitung $\Delta = 0.25$ für hinreichend grosse n zusätzlich

$$\inf_{\mu \ge \mu_0+\Delta\ ,\ 0.25 \le \sigma^2 \le 9.75} E_{\mu,\sigma^2}(\phi) \quad \ge \quad 1-\alpha$$

erreichen. Wie gross muss man n hierfür mindestens wählen?

(Abgabe: Programm, Graphiken)

Aufgabe 6.3 (Tests im Normalverteilungsmodell II): Der folgende Datensatz (aus Engelhard, Der Porenraum der Sedimente, Springer 1960) misst die Porosität von Sandsteinbrocken, die einem Bohrkern aus 1100 - 1105 m Tiefe entnommen sind:

22.1	23.5	25.3	26.6	23.9	26.0	22.8	22.3	23.1	23.0	21.0	21.8
22.0	22.2	22.3	22.4	22.4	22.4	22.3	21.6	22.1	22.6	22.1	21.9
22.3	23.9	23.2	22.5	23.7	23.3	24.4	22.6	23.9	24.2	27.6	27.9
25.2	21.7	20.0	19.8	21.5	25.6	25.3	24.1	28.6	23.7	24.0	21.8
24.9	24.2	25.0	23.7	27.3	23.0	23.8	21.2	21.1			

Man nehme an, dass diese Daten als iid Beobachtungen aus einem Normalverteilungsmodell entstanden sind.

a) Man gebe Konfidenzbereiche für den unbekannten Mittelwert und für die unbekannte Varianz zu den Konfidenzkoeffizienten $\beta = 0.9$ an.

b) Man teste die Hypothese $\mathbb{H} : \mu \leq 22.75$ gegen die Alternative $\mathbb{K} : \mu > 22.75$ zum Niveau $\alpha = 0.01$ und interpretiere das Ergebnis.

c) Man teste die Hypothese $\mathbb{H} : \mu > 24.0$ gegen die Alternative $\mathbb{K} : \mu \leq 24.0$ zum Niveau $\alpha = 0.01$ und interpretiere das Ergebnis.

d) Man teste die Hypothese $\mathbb{H} : \sigma^2 = 3.5$ gegen die Alternative $\mathbb{K} : \sigma^2 \neq 3.5$ zum Niveau $\alpha = 0.05$ und interpretiere das Ergebnis.

e) Man zeichne die Gütefunktionen der in b)+c)+d) benutzten Tests über einer (μ, σ^2)-Fläche, die dem Produkt der in a) errechneten Konfidenzintervalle entspricht.

(Abgabe: kurze Text/Formelzeilen als pdf; ggfls. Graphiken als pdf)