

VORLESUNG STOCHASTISCHE ANALYSIS

Inhaltsverzeichnis

R. Höpfner, 19.04.11

Kapitel I Grundbegriffe

A. Stochastische Prozesse als zeitlich ablaufende Phänomene: Versionen und Ununterscheidbarkeit - Filtrationen und Adaptiertheit - Beispiele: Brownsche Bewegung, Poisson-Prozess

B. Messbarkeitsbegriffe: Messbare stochastische Prozesse - \mathbb{F} -progressive Prozesse - \mathbb{F} -vorhersehbare und \mathbb{F} -optionale σ -Algebra

C. Die "üblichen Hypothesen": übliche Hypothesen und Pfadeigenschaften von Prozessen - Beispiele Brownsche Bewegung, Poisson-Prozess

Kapitel II Stopzeiten

A. Stopzeiten, vorhersehbare Stopzeiten, Schnittsätze: Definition, Beispiel, erste Eigenschaften - Satz über ankündigende Folgen (ohne Beweis) - Beginn einer Menge - Projektionssatz (ohne Beweis) - Satz über vorhersehbare Schnitte (ohne Beweis)

B. Vergangenheit vor T : Definition, erste Eigenschaften - Stopzeiten mit/ohne übliche Hypothesen - Zustand eines Prozesses zur Zeit T - Folgerungen

C. Zerlegung von Stopzeiten: erreichbarer und völlig unerreichbarer Teil einer Stopzeit

D. Stopzeiten und càdlàg-Prozesse: Bemerkung über càdlàg-Funktionen - dünne Mengen in $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ und ausschöpfende Folgen - Sprünge eines càdlàg-Prozesses X - Zerlegung von càdlàg-Prozessen - Zerlegung von vorhersehbaren càdlàg-Prozessen

Kapitel III Martingale

A. Grundlagen und Wiederholung: Wiederholung (Definition, Doob-Ungleichung, Upcrossings) - Beispiel: Likelihoodratioprozesse - càdlàg-Modifikation von Martingalen unter üblichen Hypothesen - f.s.-càdlàg-Modifikation ohne übliche Hypothesen

B. Submartingale von Klasse [LD]: Definition - das Doléans-Mass - Stopsätze - vorhersehbare càdlàg-Martingale sind stetig

C. Doob-Meyer-Zerlegung (ohne Beweis): Wachsende Prozesse bezüglich \mathbb{F}^P und \mathbb{F} - Doob-Meyer-Zerlegung bezüglich \mathbb{F}^P und \mathbb{F} - Beispiele: die Sprungzeiten im Poissonprozess sind völlig unerreichbar

Kapitel IV Stochastische Integrale

A. Die Räume $\mathcal{M}^2, \mathcal{M}^{2,c}$: Definition und Grundeigenschaften

B. Stochastische Integrale $\int HdM$, $M \in \mathcal{M}^2$, $H \in L^2(M)$: Integranden aus $L^2(M)$ - Integration vorhersehbarer Elementarprozesse - stochastische Integrale als lineare Isometrie $L^2(M) \rightarrow \mathcal{M}^2$ - Bemerkung: keine pfadweise Definition ausser in Spezialfällen

C. Lokalisation: Die Räume \mathcal{M}_{loc}^2 , $L_{loc}^2(M)$ und Grundtatsachen über Lokalisation - stochastisches Integral $\int HdM$ für $M \in \mathcal{M}_{loc}^2$, $H \in L_{loc}^2(M)$ - Eigenschaften des stochastischen Integrals

D. Vorhersehbare quadratische Variation und stochastisches Integral: Die 'Spitzklammern' $\langle M \rangle$, $\langle M, N \rangle$ für $M, N \in \mathcal{M}_{loc}^2$, mit/ohne übliche Hypothesen - quadratische Variation und Charakterisierungssatz für stochastische Integrale - Lemmata und Beweise - Beispiel: kompensierte Zählprozesse

Kapitel V Stetige Semimartingale, Itô-Formel

A. Stetige Semimartingale: Definition stetiger Semimartingale, Eindeutigkeit des Martingalteils M - Approximation von $\langle M \rangle$ aus quadratischen Zuwächsen von X

B. Itô-Formel: Itô-Formel für stetige Semimartingale

Kapitel VI Einige Anwendungen der Itô-Formel

A. P. Lévy's Charakterisierung der Brownschen Bewegung: \mathcal{F} -Brownsche Bewegung - Charakterisierungssatz von P. Lévy - (Folgerung: starke Markov-Eigenschaft der Brownschen Bewegung)

B. Exponentiale: Exponentielle Semimartingale - Exponential $\mathcal{E}_P(M)$ eines lokalen Martingals - Satz von Novikov (ohne Beweis) - Beispiele

C. Der Satz von Girsanov: Lokale Dominiertheit von Ws-Massen auf kanonischen Pfadräumen - Dichteprozess von Q zu P relativ zur Filtration \mathcal{F} falls $Q \ll_{loc} P$ - lokale Äquivalenz $Q \stackrel{loc}{\sim} P$ und Transformation von Martingalen - Satz von Girsanov mit endlichem Zeithorizont

Kapitel VII Stochastische Differentialgleichungen

A. Starke Lösungen: Ein Beispiel - Voraussetzungen an die Koeffizienten einer SDE - Definition starker Lösungen einer SDE - Ito-Sätze über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen - Beispiel: explizite Lösung linearer SDE

B: Schwache Lösungen: Beispiel: Konstruktion von Lösungen durch Zeittransformation - Definition einer schwachen Lösung - Eindeutigkeitsbegriffe - Bemerkungen und Beispiele zu starken/schwachen Lösungen - Konstruktion schwacher Lösungen mit Girsanov