Prof. Dr. R. Höpfner

VORLESUNG EINFÜHRUNG IN DIE STOCHASTIK

Institut für Mathematik, Universität Mainz

Wintersemester 2010/2011

Inhaltsverzeichnis, Stand 21.10.2011

Kap. 0 Womit beschäftigt sich Stochastik?

Einige Worte für 'Zufall'. Einige grosse Namen, Anfänge der Wahrscheinlichkeitstheorie. Zufall und Notwendigkeit: Münzwurf und Konvergenz der relativen Häufigkeiten, Folge unabhängiger Einzelbeobachtungen und Konvergenz von Histogrammen, Folge fairer Glücksspiele und Brownsche Bewegung. Präzise Begriffe oder 'Paradoxe': die Bertrand'sche Sehne im Einheitskreis.

Kap. I Über Ω und $\mathcal{A}$ und P

A. Diskrete Modelle, Würfelspiele: Wahrscheinlichkeit und σ-Algebra in diskreten Modellen, Beispiele: verschiedene Würfelspielmodelle

B. σ-Algebren: Definition σ-Algebra, erste Eigenschaften; Beispiel: unendliche Folge von Münzwürfen. Erzeuger einer σ-Algebra.

C. Wahrscheinlichkeitsmasse: Definition Wahrscheinlichkeitsmass, Mass, auf- und absteigende Stetigkeit. Existenz gewisser Masse als 'Fakt', Lebesguemass, Borel-σ-Algebra, Verteilungsfunktionen.

D. Wichtige Masse auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: Verteilungen mit Dichten, Gleichverteilung, Normalverteilung, Gamma-Verteilungen, Beta-Verteilungen. Exponentielle Wartezeiten und Poissonprozess. Diracmass, Poissonverteilung. Mischungen von Verteilungen.

E. Mehrdimensionale Normalverteilungen: Gestalt der Dichte in beliebiger Dimension d, Abhängigkeit der Marginalien im Fall $d = 2$.

Kap. II Kombinatorik

A. Laplace-Modelle: Ziehen mit Zurücklegen, Ziehen ohne Zurücklegen, k Kugeln in n Zellen, Geburtstagsproblem, k-elementige Teilmengen von $1, 2, \ldots, n$, Einschluss-Ausschluss-Formel.

B. Binomial-, Multinomial-, Hypergeometrische Verteilung: Definition, Interpretation, Eigenschaften. Ein Beispiel für Maximum-Likelihood-Schätzung.

Kap. III Unabhängigkeit

A. Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten: Bedingte Wahrscheinlichkeiten liefern ein neues Wahrscheinlichkeitsmass, Zerlegung nach disjunkten Ursachen, Bayesformel, Beispiele.

B. Unabhängigkeit von Ereignissen: Definition, Abgrenzung von paarweiser Unabhängigkeit, Beispiele in verschiedenen Würfelspielmodellen

C. Zufallsvariable und Verteilung: Definition Zufallsvariable / messbare Abbildung, Verteilung einer ZV, $\mathbb{R}^d$-wertige ZV und Dichten auf $\mathbb{R}^d$, Transformationsformel, Beispiele.

D. Unabhängige ZV: Unabhängigkeit von ZV, Dichten mit Produktgestalt, Summe und Quotient unabhängiger Gamma-verteilter ZV, Anwendung auf Sprungzeiten im Poisson-Prozess. Existenz allgemeiner iid Familien als 'Fakt'. Orthogonale Transformationen mehrdimensionaler Normalverteilungen. Geometrische Verteilung und Negativ-Binomialverteilungen als Wartezeitverteilungen in Würfelspiel- und Münzwurfmodellen.

E. Integrale $\int_\Omega \dots dP$ und Produktformeln: Definition von $\int_\Omega g(X_1, \dots, X_k)dP$ für Verteilungen mit Dichten und für diskrete Verteilungen, Produktformeln bei Unabhängigkeit.

Kap. IV Momente und Faltungsformeln

für Verteilungen mit Dichten und für diskrete Verteilungen:

die Räume $L^p(P)$, $p \geq 1$, Erwartungswert, Varianz, Kovarianzmatrix. Varianzformel, empirischer Mittelwert und empirische Varianz, Korrelation. Beispiele in Normalverteilungen, Binomialverteilungen, Gammaverteilungen; stabile Verteilung mit Parameter $\frac{1}{2}$.

Faltung von Wahrscheinlichkeitsmassen, Faltungsformeln, Faltungsfamilien. Wahrscheinlichkeitserzeigende Funktionen, Momente, Produktformeln und Faltungen.

Kap. V Einfache Grenzwertsätze

A. Wichtige Ungleichungen: Markov- und Chebychev-Ungleichung, P-Nullmengen und Ereignisse von Wahrscheinlichkeit 1, Schwarzsche Ungleichung und Jensen-Ungleichung.

B. Das schwache Gesetz der grossen Zahlen: P-stochastische Konvergenz, Münzwurfbeispiele, schwaches Gesetz der grossen Zahlen. P-fast sichere Konvergenz, starkes Gesetz als 'Fakt'.

C. Poisson-Grenzwertsatz: Radioaktiver Zerfall, Poisson-Grenzwertsatz, Unabhängigkeit der Zuwächse im Poissonprozess.

D. Der Satz von deMoivre-Laplace: Satz von deMoivre-Laplace, Stirlingformel. allgemeine Fassung des Zentralen Grenzwertsatzes als 'Fakt'. Binomialapproximation an die Brownsche Bewegung. Ausblick: die Brownsche Bewegung.